# INTRODUCCIÓN: LA MATEMATICA FINANCIERA

El pago del interés como una recompensa o retorno por el uso de un capital es una parte establecida (o institución) de nuestra vida económica.

En un sentido, el interés puede ser definido como el pago hecho por una persona, a quien es dado el uso de una suma de dinero (el capital), al propietario de ese capital. En la teoría, esos dos ítems, interés y capital no necesariamente deben ser expresados en la misma mercadería. Por ejemplo, un agricultor recibe en préstamo un tractor, y debe pagar su uso con parte de la cosecha.

En la teoría financiera y actuarial, sin embargo, es necesario considerar sólo el caso de que ambos, capital e interés, sean expresados en términos de dinero.

---

Todo bien económico o servicio de un bien económico constituye un elemento de riqueza.

El valor de un elemento de riqueza varía según el mercado y el tiempo.

En un determinado momento el valor define el capital.

**Capital** es toda cantidad colocada en una operación financiera.

**Operación financiera** es toda acción que produce, por desplazamiento en el tiempo, una variación del capital.

El capital está sometido a un régimen financiero, constituyendo el estudio de sus leyes y la valuación de sus efectos cuantitativos el objeto del cálculo financiero.

En la vida real, la operación financiera se muestra como el cambio no simultáneo de bienes económicos, lo que lleva implícito la equivalencia de ambos en un punto de referencia.

---

La matemática financiera es una ciencia de aplicación inmediata en el sentido de que se encuentra una fácil relación entre los modelos matemáticos en que se basa y el mundo en que tales personas viven.

Los problemas no son difíciles de solucionar ni requieren desarrollos aparatosos. Fundamentalmente, tiene facetas comunes.

En primer lugar debemos señalar que se trata de fórmulas de valor temporal:

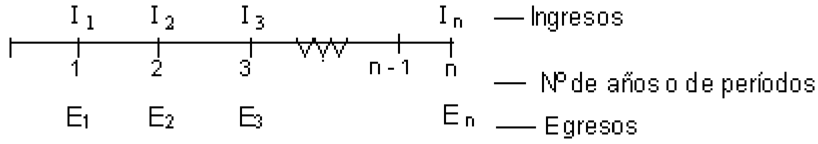
"La variable independiente es el tiempo"

En segundo lugar debemos señalar que la resolución de los problemas se facilita, si es posible rápidamente:

1) Elaborar un diagrama temporal,y
2) Utilizar una ecuación devalor.

1) <u>El Diagrama Temporal</u>

Para plantear un problema financiero resulta conveniente dibujar un diagrama temporal. Por tal entendemos el dibujo en una escala de tiempo (días, meses, años) en el que se consigna la fecha y el volumen de cada transacción.




El *sentido* del diagrama temporal es registrar todas las operaciones financieras en el momento en que ocurren para tenerlas en cuenta al utilizar una ecuación de valor.

2) Utilizar una ecuación devalor.

Todo problema financiero puede ser resuelto mediante una ecuación devalor.

Una *ecuación de valor* es, simplemente, una igualdad entre entradas ysalidas (prestaciones y contraprestaciones) de capitales financieros, una vez que sus vencimientos han sido homogeneizados para un tiempo común (es decir, que el valor de los capitales ha sido trasladado a un instantecomún)

***Suma de prestaciones capitalizadas a un momento dado = sumade contraprestaciones capitalizadas al mismo momento dado***

***o:***

***Suma de prestaciones actualizadas a un momento dado = sumade contraprestaciones actualizadas al mismo momento dado***

## TEMA I: INTERES

El interés, en general, puede ser definido como el dinero abonado por el uso de cierta suma de dinero prestado por un intervalo de tiempo. También puede ser expresado como la ganancia de una inversión productiva de capital.

Entendemos siempre al interés como un pago o ganancia vencida, es decir, que se produce al final del término del plazo de la transacción.

Hay varios factores envueltos en cualquier operación de interés: el capital original, el tiempo y la tasa de interés.

El capital original, es el capital invertido o el dinero prestado, sobre el cual el interés debe ser pagado.

El tiempo, es el período sobre el cual el interés ha sido pagado, es conocido también como el término de la transacción.

La tasa de interés, es la ganancia por cada unidad de capital en una unidad de tiempo.

El monto, es la suma del capital más el interés.

Cuando únicamente el capital de origen produce intereses, nos referimos al interés simple. Cuando el interés pagado sobre el capital, así como el capital de origen producen intereses, nos referimos al capital compuesto.

### INTERÉS SIMPLE

El interés que es calculado sobre el capital inicial por todo el término de la transacción, es denominado interés simple. En el interés simple, el interés ganado no es reinvertido productivamente. El interés de cada período sucesivo es el mismo que del primer período.

El interés simple puede ser definido como el interés que es proporcional al tiempo. Así, el interés de dos períodos es dos veces el de un período; el de cinco períodos, cinco veces el de uno.

El interés es pagado siempre al final del término de la transacción. El interés simple se usa para períodos cortos de tiempo, generalmente no mayores de un año.

Denominaremos:
C = Capital de origen
I = Interés
i = Tasa de interés (tanto por uno; i = r/100)
n = Tiempo (expresado en años)
M = Monto

$$I = C \cdot i \cdot n$$

$$M = C + I = C + C \cdot i \cdot n$$

$$M = C\,(1 + i \cdot n)$$

Deducciones de la fórmula general:

$$i = \frac{I}{C \cdot n} \qquad C = \frac{M}{1 + n \cdot i} \qquad n = \frac{I}{C \cdot i}$$

Interés exacto y ordinario

La tasa de interés es la ganancia vencida por cada peso invertido en un año. Es decir, la ganancia en una unidad de tiempo de una unidad de capital. La unidad de capital generalmente expresada es 100 y por ello se habla de tanto por ciento. Sin embargo trabajaremos con **i** tanto por uno (por cada peso), en donde i = r/100.

La unidad de tiempo generalizada es el año. Las tasas de interés son expresiones anuales (es decir, son tasas anuales). Cuando el tiempo es expresado en días (t días), para calcular el interés el tiempo debe traducirse a una fracción del año (n = t / 365 , ó n = t / 360). El interés ordinario (Io) se calcula tomando los meses de 30 días y el año de 360. Como el año tiene 365 días, al interés exacto ($I_e$) lo determinamos sobre 365días.

$$I_o = C \cdot i \cdot \frac{t}{360} \qquad \frac{I_e}{I_o} = \frac{360}{365} = \frac{72}{73} = 1 - \frac{1}{73} \qquad I_e = I_o - \frac{1}{73}\, I_o$$

$$I_e = C \cdot i \cdot \frac{t}{365} \qquad \frac{I_o}{I_e} = \frac{365}{360} = \frac{73}{72} = 1 + \frac{1}{72} \qquad I_o = I_e + \frac{1}{72}\, I_e$$

(1)

**INTERÉS COMPUESTO**

Cuando el interés se agrega al capital en ciertos períodos regulares de tiempo, y el interés de cada sucesivo período se calcula como un dado porcentaje sobre el nuevo capital (capital de origen más interés), el monto total acumulado al final de cierto intervalo de tiempo es llamado monto a interés compuesto delcapital inicial.

La diferencia entre el monto compuesto y el capital de origen, se denomina interés compuesto.

Así, en interés compuesto, el interés se calcula mediante un periódico sucesivo incremento de la base. Se asume, que el interés ganado en períodos sucesivos, no permanece ocioso sino que será inmediatamente reinvertido productivamente.

El tiempo entre dos períodos sucesivos de capitalización de intereses se denomina período de capitalización. El lapso es generalmente de un año, medio año (semestre), un cuarto de año (trimestre), un mes, etc.

La frecuencia de capitalización, es el número de veces al año que el interés se capitaliza. Si la frecuencia es m, el interés es capitalizable m veces al año.

El monto compuesto y el interés compuesto son proporcionales al capital, pero no al tiempo.

*Llamemos*: **C**, capital de origen; **i**, tasa de Interés (tanto por uno), **n**, el tiempo expresado en años o períodos de capitalización; y **A** $_n$ el monto en el enésimo período.

| n | Capital de origen | Interés | Monto |
|---|---|---|---|
| 1 | C | $C \cdot i$ | $A_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1+i)$ |
| 2 | $A_1 = C(1+i)$ | $A_1 \cdot i$ | $A_2 = A_1 + A_1 \cdot i = A_1 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i) \cdot (1+i)$<br>$A_2 = C \cdot (1+i)^2$ |
| 3 | $A_2 = C\,(1+i)^2$<br>……… | $A_2 \cdot i$<br>…… | $A_3 = A_2 + A_2 \cdot i = A_2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i)$<br>$A_3 = C \cdot (1+i)^3$<br>…… |
| n | $A_{n-1} = C\,(1+i)^{n-1}$ | $A_{n-1} \cdot i$ | $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \cdot i = A_{n-1}\,(1+i) = C\,(1+i)^{n-1} \cdot (1+i)$ |

$$A_n = C \cdot (1+i)^n$$

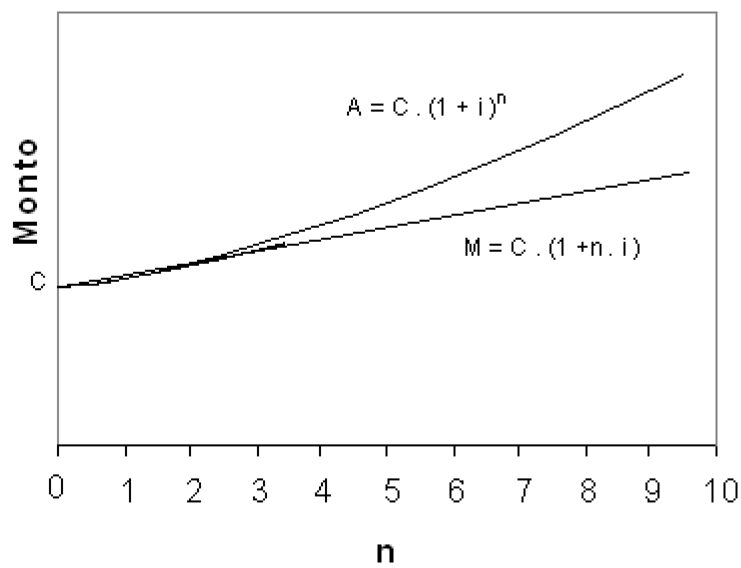
Se deduce que para capitalizar a interés compuesto, basta multiplicar el capital de origen por el factor (1 + i), tantas veces como períodos de capitalización existan.

(1 + i) se denomina **factor de capitalización.**

[1] El Banco Central de la República exige al sistema financiero argentino trabajar con el tiempo expresado en días en interés simple. Para la expresión de la tasa, que es anual, se trabaja con un año de de 365 días, es decir con la fórmula: $I = C \cdot i \cdot \frac{t}{365}$

Para n =1, A = M = C (1+ i )
Para n> 1 R > 0 A >M
Para n < 1 R < 0 A <M

Gráficamente:




El fraccionamiento del tiempo a los efectos de la capitalización de losintereses

El fraccionamiento del año en **"m"** subperíodos, a los efectos de la capitalización de los intereses, nos lleva a considerar: la tasa proporcional **i/m**; la tasa efectiva **i´**;

Cuando el año se divide en varios subperíodos la tasa nominal i en su expresión anual sigue usándose en la relación contractual.

La tasa proporcional es la que resulta de dividir la tasa nominal i por el número de subperíodosm y es la que se aplica en cada subperíodo de capitalización.

El monto en un año será: $A = C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}$

Y en "n" años: $A = C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$

E*jemplo:* buscamos el monto de un capital de $100 al 24% anual de interés, colocado a interés compuesto: a) a un año, b) a 5 años. La capitalización de los intereses se hace: 1) Anual, 2) Semestral; 3) Trimestral; 4) Mensual ; %) Diaria

1) m =1 a) $A_1$ = 100. (1 + 0,24) =124
b) $A_5$= 100. $(1 + 0{,}24)^5$ = 293,16

2) m =2 a) $A_1$= 100. $(1 + 0{,}24/2)^{2}$ =125,44
b) $A_5$ = 100. $(1 + 0{,}24/2)^{5.2}$ = 310,58

3) m = 4 a) $A_1$= 100. $(1 + 0{,}24/4)^{4}$ =126,25
b)$A_5$=100.$(1+0{,}24/4)^{5.4}$=320,71

4) m =12 a) $A_1$= 100. $(1 + 0{,}24/12)^{12}$ =126,82
b) $A_5$= 100. $(1 + 0{,}24/12)^{5.12}$ = 328,10

5) m= 360 a) $A_1$ = 100. $(1 + 0{,}24/360)^{360}$ =127,11
b) $A_5$ = 100. (1 + 0,24/360) 360 . 5 = 331,88

Siendo $m > 1$ , $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m > (1 + i)$

*El fraccionamiento del tiempo permite obtener un mayor monto al capitalizar más rápidamente los intereses.*

<u>La tasa efectiva **i´**</u>

La tasa efectiva es el tanto por uno real de rendimiento anual cuando la capitalización de los intereses se realiza en varios subperíodos en el año. La expresamos de la siguiente forma:

$$1 + i' = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

**i´** es una tasa anual que da el mismo monto en un año que una proporcional "i/m" en "<u>m</u>" subperíodos.
**i´** está en función creciente con respecto a <u>**m**</u>

$$i' = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

El menor valor de **i´** lo obtenemos para m = 1, donde i´ = i

Al crecer <u>m</u>, también lo hace **i´**. El mayor valor lo obtenemos cuando **m →∞.**

$i' = e^{i} - 1$ Tasa instantánea de capitalización
$A_1 = C . e^{i}$ Monto en un año con capitalización continua
$A_n = C . e^{n.i}$ Monto en "n" años con capitalizacióncontinua

---

*Ejemplo*: veamos los diferentes valores de i´ para un i=0,06

| | m | i´ (para i=0,06) |
|---|---|---|
| | 1 | 0,06 |
| $i' = 1{,}03^2 - 1$ | 2 | 0,0609 |
| $i' = 1{,}015^4 - 1$ | 4 | 0,061364 |
| $i' = 1{,}005^{12} - 1$ | 12 | 0,061678 |
| $i' = 1{,}0001667^{360} - 1$ | 360 | 0,061831 |
| $i' = e^{0{,}06} - 1$ | →∞ | 0,061837 |

---

El Banco Central de la República exige a las entidades financieras que en toda operación de interés o descuento se exprese conjuntamente con la tasa nominal anual la tasa efectiva. Además, cuando los plazos son menores de un año, que los mismos se expresen en días de un año con 365días.
La tasa efectiva representa lo realmente ganado en un año por cada unidad de capital cuando la operación se repite "m" veces en el año reinvirtiendo los intereses ganados.

La tasa efectiva es $i' = (1 + \frac{i}{m})^m - 1$

Si al subperíodo se lo expresa en días (t) y al año se lo expresa como de 360 días como era costumbre:

$m = \frac{360}{t}$ y cada período $\frac{1}{m} = \frac{t}{360}$

Si el subperíodo tiene “t” días y el año se considera con 365 días:

$m = \frac{365}{t}$ y $\frac{1}{m} = \frac{t}{365}$

Y la tasa efectiva:

$$i' = (1 + i\,\frac{t}{360})^{360/t} - 1 \quad \text{ó} \quad i' = (1 + i\,\frac{t}{365})^{365/t} - 1$$

---

*Ejemplo* : para i = 0,74

| **Año con 360 días** | | | | **Año con 365 días** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** | **m** | **i** | **i´** | **t** | **m** | **i** | **i´** |
| 360 | 1 | 0,74 | 0,74 | 360 | 1 | 0,74 | 0,74 |
| 180 | 2 | 0,74 | 0,8769 | 180 | 2,02777 | 0,74 | 0,8792 |
| 120 | 3 | 0,74 | 0,9375 | 120 | 3,04167 | 0,74 | 0,9393 |
| 90 | 4 | 0,74 | 0,9718 | 90 | 4,05555 | 0,74 | 0,9733 |
| 30 | 12 | 0,74 | 1,0503 | 30 | 12,16667 | 0,74 | 1,0511 |
| 1 | 360 | 0,74 | 1,0943 | 1 | 365 | 0,74 | 1,0947 |
| →0 | →∞ | 0,74 | 1,0959 | →0 | →∞ | 0,74 | 1,0959 |

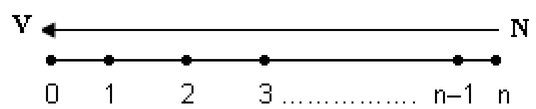
---

## TEMA II: OPERACIONES DE DESCUENTO

## VALOR ACTUAL Y DESCUENTO SIMPLE

El valor actual y el descuento simple en función de la tasa de descuento i.

Nuestro problema es ahora conocer el valor actual, es decir, que valor tiene hoy una cantidad que se recibirá en el futuro




Llamamos **V** al valor actual, y **N** al valor futuro (valor nominal) que se recibirá en la época **n**.

Planteado el problema dentro del campo del interés simple a la tasa **i**, el valor actual **V** debe ser el de un capital original que puesto a interés simple a la tasa **i** por el tiempo **n** nos de un monto igual a **N**

$$V \,.\, (1 + i \,.\, n) = N \quad \text{de donde} \quad \boxed{V = \frac{N}{1 + i \,.\, n}}$$

El descuento será igual a la diferencia entre el valor nominal **N** y el valor actual **V**:

$$D = N - V = N - \frac{N}{1 + i \,.\, n}$$

$$\boxed{D = N \, \frac{n \,.\, i}{1 + n \,.\, i}} \quad \textbf{(I)}$$

(Corresponde aclarar que dado que el descuento simple se utiliza para períodos menores a un año y como **n** es la expresión del tiempo en años, cuando el tiempo se define en días - t días - resulta: n = t/360 ó n= t/365 según se considere el año como de 360 o 365 días).

El valor actual y el descuento simple en función de la tasa de descuento **d**. Descuento comercial o bancario.

Hemos encontrado el valor actual y el descuento simple en función de la tasa de interés **i**. Pero en la práctica este procedimiento no es el usado en la actividad comercial y financiera.

En su lugar el descuento simple **D** se calcula directamente sobre **N**, mediante el uso de la tasa de descuento **d**, y el valor actual se determina sustrayendo el descuento del valor nominal.-

$$\boxed{D = N \,.\, d \,.\, n}$$

$$\text{Y el valor actual:} \quad V = N - D = N - N \,.\, d \,.\, n$$

$$\boxed{V = N \ (1 - n \,.\, d)}$$

La tasa de descuento **d** es la quita que sufre una unidad de capital en una unidad de tiempo. Se expresa también en un tanto por uno, igual que la tasa de interés.

El descuento simple calculado a la tasa de descuento **d**, es denominado frecuentemente descuento bancario, dado que los bancos lo utilizan para sus operaciones de préstamos a plazos cortos , y es la quita que realizan los bancos sobre el valor nominal de la obligación por pagársela antes de su vencimiento.

Al descuento comercial o bancario se lo denomina además interésadelantado, ya que el mismo no es sino el interés calculado sobre el valor nominal **N** a la tasa de descuento **d** por el tiempo **n**, que se cobra por adelantado. Por ello, tambien a la tasa de descuento **d** se la conoce también en el mercado y en publicaciones muy difundidas como tasa de interés adelantada.

En las operaciones de descuento la tasa de descuento **d** es mascomúnmente utilizada que la tasa de interés **i** porque su uso es más sencillo (la fórmula del descuento con **d** es mas elemental que con **i**), y además porque reditúa a iguales valores de tasa un mayor ingreso alprestamista.

El descuento simple se utiliza generalmente para períodos menores de un año (cuando el tiempo es menor que un año se expresa generalmente en t días, y como **n** es una expresión en años, resulta que: n=t/360 ón=t/365)

$$D = N \cdot d \cdot \frac{t}{360} \qquad \text{ó} \qquad D = N \cdot d \; \frac{t}{365}$$

Nuestro sistema bancario trabaja hoy con años de 365 días. Además el tiempo en períodos menores de un año se expresa en días y no en meses.

Equivalencia entre ambos sistemas

Para que exista equivalencia entre una tasa de interés **i** y una tasa de descuento **d** (en un tiempo **n**), el valor actual a la tasa de interés **i** en el tiempo **n** del valor nominal **N** debe ser igual al valor actual del mismo capital en el mismo tiempo a la tasa **d.** En otras palabras existe equivalencia si los descuentos son iguales.

Descuento a la tasa **i**: $D = N \dfrac{n \cdot i}{1 + n \cdot i}$ (1)

Descuento a la tasa **d**: $D = N \cdot d \cdot n$ (2)

Igualando: (2) = (1)

$$\cancel{N} \cdot d \cdot \cancel{n} = \cancel{N} \frac{\cancel{n} \cdot i}{1 + n \cdot i}$$

De ahí: $\boxed{d = \dfrac{i}{1 + n \cdot i}}$ ó $\boxed{i = \dfrac{d}{1 - n \cdot d}}$

Puede probarse fácilmente que en un sistema de equivalencias **i > d**, y que la diferencia es mayor cuando aumenta el tiempo.

*Ejercicios*: cuales son las tasas de interés equivalente a la tasa de descuento d=0,20 cuando: a) n = 1 año; b) n = 1 semestre; y c) n

= 1/12 a) i = 0,2 / (1 – 0,20) =0,25

Comprobación:

N = 100 ; d = 0,20 ; n= 1 D = N . d . n = 100 . 0,2=20

V = N – D = 100 - 20

= 80 C = 80 i = 0,25; n= 1 I = C .i . n = 80 . 0,25

=20

M = C + I = 80 + 20= 100

b) i = 0,2/ (1 – 0,1) = 0,2 / 0,9 = 0,2222

c) 0,2 / [ 1 – (0,2/12) ] = 0,2 / (1 – 0,0166) = 0,2 / 0,9834 = 0,2034

Como **n** es una expresión en años y el descuento simple se utiliza para períodos menores de un año, el tiempo generalmente se expresa en días (t días).

n = t / 360 ó n = t / 365

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + t\,\frac{i}{360}}} \quad ó \quad \boxed{i = \frac{d}{1 - t\,\frac{d}{360}}}$$

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + t\,\frac{i}{365}}} \quad ó \quad \boxed{i = \frac{d}{1 - t\,\frac{d}{365}}}$$

El Banco Central para períodos menores de un año exige que el tiempo se exprese en días en un año con 365 días. Al mismo tiempo cuando se expresa una tasa nominal anual de descuento **d**, conjuntamente con ella debe colocarse la nominal anual de interés equivalente y su correspondiente <u>tasa efectiva de interés.</u>

---

*Ejemplo*: d = 0,74, plazo: 30 días. Para n = 30/365

$$i = \frac{0{,}74}{[1 - (0{,}74 \,.\, 30 / 365)\,]} = 0{,}7879$$

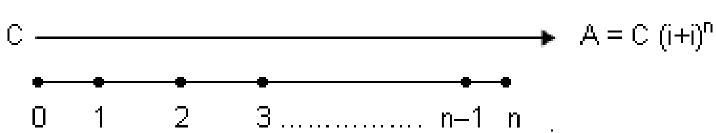
$$i' = (1 + 0{,}7879 \,.\, 30 /365)^{365/30} - 1 = 1{,}1456$$

Tasa nominal de descuento: 74 %

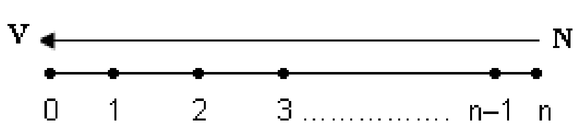
## <u>VALOR ACTUAL Y DESCUENTO COMPUESTO</u>

<u>El valor actual y el descuento compuesto en función de la tasa de interés **i**.</u>

En el interés compuesto nuestro problema era encontrar el monto que producía un capital al final de un cierto período de tiempo, o sea el futuro valor de una suma de dinero invertida a interés compuesto.




Nuestra intención es ahora, conocer el valor actual, es decir, qué valor tiene hoy una cantidad que se recibirá en el futuro.




Llamamos **V** al valor actual y **N** (valor nominal) al valor futuro en la época **n**.

Planteando el problema dentro del campo del interés compuesto a la tasa **i**, el valor actual debe ser tal que puesto a interés compuesto a la tasa **i** en el tiempo **n**, nos dé un monto igual a **N**, o sea que:

$$V\,(1 + i)^{n} = N \quad ; \quad V = \frac{N}{(1 + i)^{n}}$$

$$\text{Llamamos: } v = \frac{1}{(1 + i)} = (1 + i)^{-1} \qquad \boxed{V = N \,.\, v^{n}} \qquad \textbf{(3)}$$

Para capitalizar a interés compuesto hemos multiplicado por el factor (1 + i) por cada año de capitalización. Para actualizar, en cambio, multiplicamos por el factor **v** por cada período que nos retrotraemos.

Denominamos a (1+i) *factor de capitalización*.-

Denominamos a $v = (1 + i)^{-1} = \dfrac{1}{(1+i)}$ **factor de actualización**.

La diferencia entre el valor nominal y el valor actual es el descuento compuesto:

$$D = N - V = N - N \cdot v^n$$

$$\boxed{D = N\,(1 - v^n)} \quad \textbf{(4)}$$

$$D = N\,[1 - (1+i)^{-n}] = N\,[1 - \frac{1}{(1+i)^{-n}}\ ]$$

Los valores de $v^n = (1+i)^{-n}$ están tabulados en las tablas financieras. También pueden ser calculados usando logaritmos, o por máquinas científicas o financieras.

<u>El valor actual y el descuento compuesto en función de la tasa de descuento **d.**</u>

El descuento compuesto también puede calcularse en función de una tasa de quita (la tasa de descuento **d**).-

$$\boxed{V = N \cdot (1-d)^n} \quad \textbf{(5)}$$

| **n** | **Capital al final del período de actualizacion** | **Descuento** | **Capital al comienzo del periodo de actualizacion** |
|---|---|---|---|
| 1 | N | N . d | $V_1 = N - N \cdot d = N \cdot (1-d)$ |
| 2 | $V_1 = N\,(1-d)$ | $V_1 \cdot d$ | $V_2 = V_1 - V_1 \cdot d = V_1 \cdot (1-d) = N\,(1-d)\,(1-d) = N\,(1-d)^2$ |
| 3 | $V_2 = N\,(1-d)^2$<br>...................... | $V_2 \cdot d$<br>…… | $V_3 = V_2 - V_2 \cdot d = V_2 \cdot (1-d) = N\,(1-d)^2\,(1-d) = N\,(1-d)^3$ |
| n | $V_{n-1} = N\,(1-d)^{n-1}$ | $V_{n-1} \cdot d$ | $V_n = V_{n-1} - V_{n-1} \cdot d = V_{n-1}\,(1-d) = N\,(1-d)^{n-1} \cdot (1-d)$ |

El descuento es igual al *valor nominal* menos el *valor actual*:

$$D = N - V = N - N \cdot (1-d)^n$$

$$\boxed{D = N \cdot [1 - (1-d)^n]} \quad \textbf{(6)}$$

A diferencia con el descuento simple, en los problemas de actualización a descuento compuesto se trabaja más con la tasa **i** que con la tasa **d**.

<u>Equivalencia entre ambos sistemas</u>

Existe equivalencia entre una tasa de interés **i** y una tasa de descuento **d** cuando los valores actuales calculados con ambas tasas sobre un mismo capital **N** y en un tiempo **n**, son iguales. Es decir que los descuentos son también iguales.

El valor actual a la tasa **i** es: $V = N \cdot v^n$

El valor actual a la tasa **d** es: $V = N \cdot (1-d)^n$

Igualando los segundos miembros:

$$\cancel{N} \cdot v^{\cancel{n}} = \cancel{N} \cdot (1-d)^{\cancel{n}}$$

$$v = 1 - d \quad \text{o sea,} \quad 1 - d = \frac{1}{(1+i)} \quad ; \quad d = 1 - \frac{1}{(1+i)}$$

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}} \qquad \boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

Comparación:

$d = i - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad d = i \,.\, v$

$i = d + d^2 + d^3 + d^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad i > d$

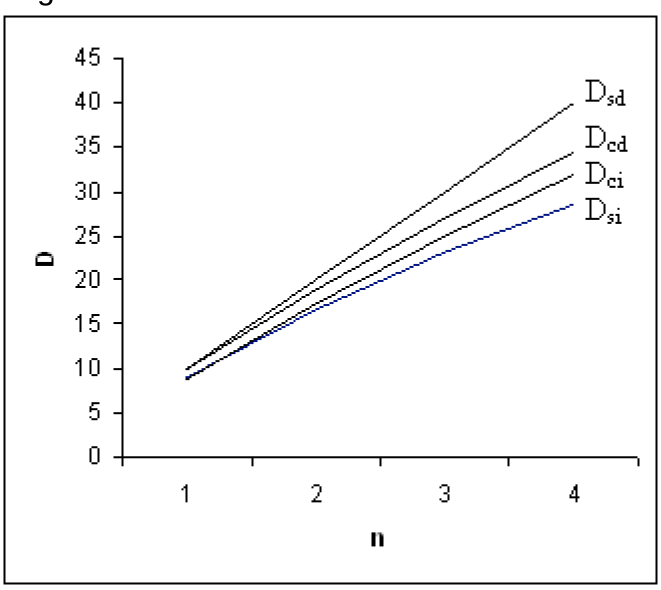
<u>Comparación numérica y grafica de los diferentes descuentos:</u>

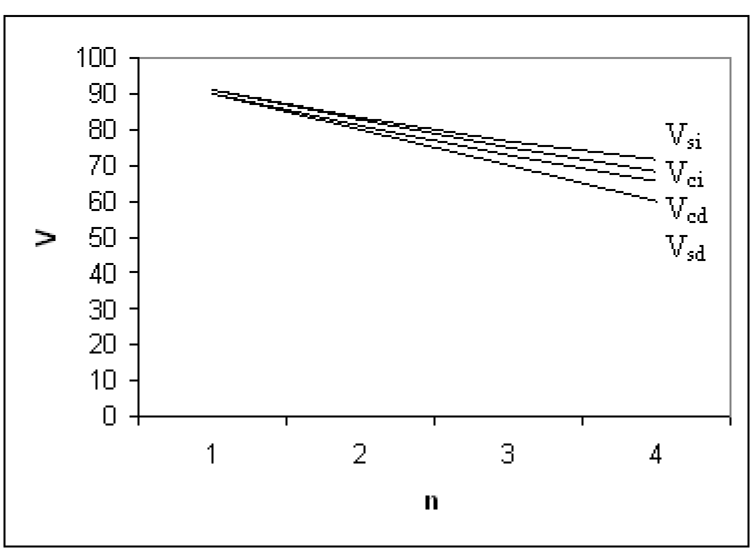
Recordemos las siguientes relaciones:

Para i = d = 0,10 calculamos los valores de descuento y valor actual para diferentes valores de n , con N = 100.

| **Descuento** | **n = 1/2** | **n = 1** | **n =2** | **n = 3** | **n = 4** | | **n =10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_{si}$ | 4,76 | 9,09 | 16,67 | 23,08 | 28,57 | ….. | 50 |
| $D_{sd}$ | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | ….. | 100 |
| $D_{ci}$ | 4,65 | 9,09 | 17,36 | 24,87 | 31,70 | ….. | 61,45 |
| $D_{cd}$ | 5,13 | 10 | 19 | 27,10 | 34,39 | ….. | 65,13 |
| **Valor actual** | | | | | | | |
| $V_{si}$ | 95,24 | 90,91 | 83,33 | 76,92 | 71,43 | ….. | 50 |
| $V_{sd}$ | 95 | 90 | 80 | 70 | 60 | ….. | 0 |
| $V_{ci}$ | 95,35 | 90,91 | 82,64 | 75,13 | 68,3 | ….. | 38,55 |
| $V_{cd}$ | 94,87 | 90 | 81 | 72,9 | 65,61 | ….. | 34,87 |

Y gráficamente:



## TEMA III: ANUALIDADES CIERTAS

Anteriormente hemos considerado el valor actual y el monto de una suma de dinero. Ahora consideramos un conjunto regular de pagos.

Las anualidades constituyen un conjunto de pagos periódicos, a igual intervalo de tiempo y generalmente del mismomonto.

Las anualidades son de gran aplicación en el campo de las finanzas y la inversión. Algunos ejemplos son: la renta de una casa o propiedad; las amortizaciones de los empréstitos; los retornos de bonos; las amortizaciones de una deuda; las primas de seguros de vida, etc.

El intervalo de pago es el lapso comprendido entre dos pagos sucesivos. Puede ser anual, semestral, trimestral, mensual, etc.

Las anualidades ciertas son aquellas en que los pagos comienzan y terminan en fechas fijas, y cuyo cumplimiento no está ligado a hechos eventuales.

Las anualidades contingentes o inciertas, son aquellas en que el cumplimiento de los pagos, está sujeto a la ocurrencia de un evento que puede o no suceder.

Ejemplos de las segundas tenemos en las primas y premios de los seguros sobre la vida.

El tiempo transcurrido desde el comienzo del primer período de pagos hastael final del último período, se denomina término de lasanualidades.

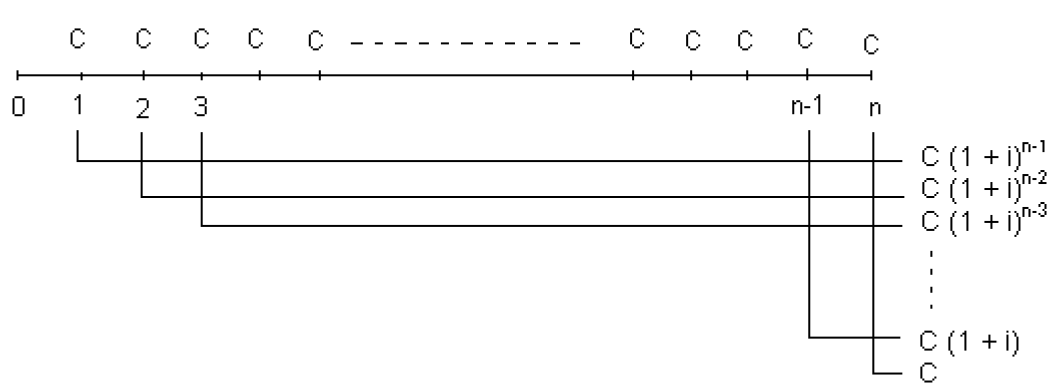
Cuando los pagos se realizan al final de cada intervalo, las anualidades son vencidas (también se las denomina anualidades ordinarias). Si los pagos son hechos al comienzo de cada período, las anualidades son anticipadas o adelantadas.

Analizaremos ahora las anualidades capitalizadas a interés compuesto.

En la valuación de anualidades distinguimos dos casos: 1) Cuando queremos conocer el monto que forman al final del término las anualidades; 2) Cuando queremos conocer el valor actual al comienzo del término de las anualidades futuras. En el primer caso se conocen como ***imposiciones*** y en el segundo como ***amortizaciones***.

**Imposiciones**

Buscamos el monto formado por **n**imposiciones vencidas anuales de valor **c** cada una, que se capitalizan a interés compuesto a la tasa **i**.




$A = c + c\,(1+i) + c.(1+i)^2 + c.(1+i)^3 + \ldots + c.(1+i)^{n-2} + c.(1+i)^{n-1}$

$A = c \sum_{K=0}^{n-1} (1+i)^k \qquad A = c\, s_{\overline{n}|} \qquad s_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k$

$\sum_{k=0}^{n-1}$**(1+i)** $^k$es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón( 1+i).

$$\boxed{S = a.\,\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\boxed{A = c\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = c\, s_{\overline{n}|i}}$$

$s_{\overline{n}|i}$ es el monto formado por **n** anualidades de valor $1 cada una. De ahí se deduce:

$$c = A\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} = A\, s_{\overline{n}|i}^{-1}$$

$s_{\overline{n}|i}^{-1} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$ es la cuota anual que produce al cabo de n años el monto de $1

Hemos visto las imposiciones vencidas, es decir que cada pago se realiza al final de cada período. En el caso de que los pagos se realicen al comienzo de cada período, estamos en presencia de las imposiciones adelantadas. Paraencontrar el monto formado por n imposiciones adelantadas, basta multiplicar por **(1+i)** lasvencidas.

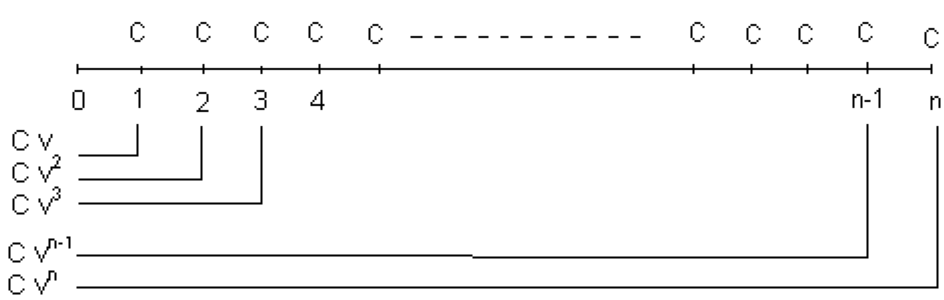
$S_{\overline{n}|i} = (1+i)\; s_{\overline{n}|i}$ monto formado por n imposiciones adelantadas de valor $1 cada una. En la moderna terminología se usa $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, enlugarde $S_{\overline{n}|i}$

Algunas relaciones:

$$s_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n-1}|i} + 1 \quad ; \quad S_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i}\ 1$$

**Amortizaciones**

Buscamos el valor actual de n anualidades vencidas de valor $c cada una a interés compuesto a la tasa i.




$$V = c\,.v + c\,v^2 + c\,v^3 + \ldots\ldots + cv^{n-1} + c\,v^n = c\,(v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^{n-1} + v^n)$$

$$V = \sum_{k=1}^{K=n} v^k$$

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{K=n} v^k$$ es el valor actual de n anualidades de $1 cadauna

Considerando la suma de los términos de una progresión geométrica: v es la razón, y como es menor que uno, tenemos que:

$$S = a.\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a_{\overline{n}|i} = v\,.\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{1+i}\,.\,\frac{1-v^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1-v^n}{i}$$

$$V = c\,a_{\overline{n}|i} = c\,\frac{1-v^n}{i} = c\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Algunas relaciones:

1) $a_{\overline{n}|i} = v^n\, s_{\overline{n}|i}$

2) $s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n\, a_{\overline{n}|i}$

3) $v^n = 1 - i\, a_{\overline{n}|i}$

4) $a^{-1}_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{1-v^n}$ → Cuota que amortiza la deuda de $1

5) $c = v\, a^{-1}_{\overline{n}|i}$

6) $a^{-1}_{\overline{n}|i} = i + s^{-1}_{\overline{n}|i}$

Para encontrar el valor de las amortizaciones adelantadas, basta multiplicar por (1+i) el valor de las vencidas.

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = A_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i)$$ Valor actual de nanualiades adelantadas de valor $1 cada una. En la moderna terminología,seutiliza $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ en lugarde $\mathbf{a}_{\overline{n}|}$.

Algunas relaciones:

1) $\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\, a_{\overline{n}|i}$

2) $a_{\overline{n}|i} = \mathbf{a}_{\overline{n+1}|i} - 1$

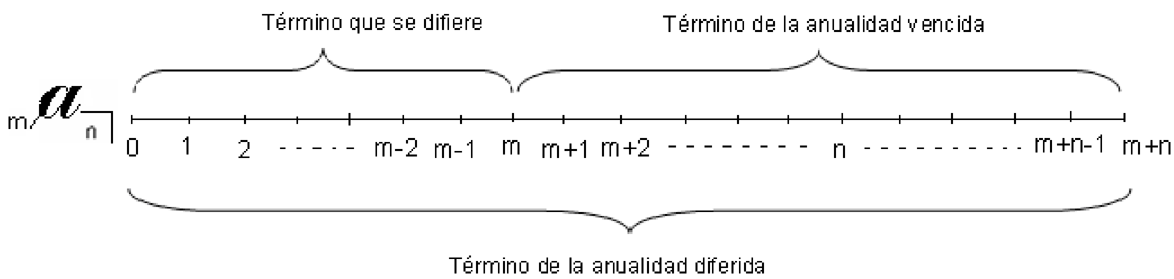
3) $\mathbf{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$

## Anualidades diferidas

Se han considerado hasta ahora las anualidades inmediatas.

Una anualidad es diferida cuando la valuación se realiza un cierto número de períodos anteriores al primer pago de la misma.

Buscamos el valor actual de n anualidades vencidas de valor $1 cada una, diferida de m años.

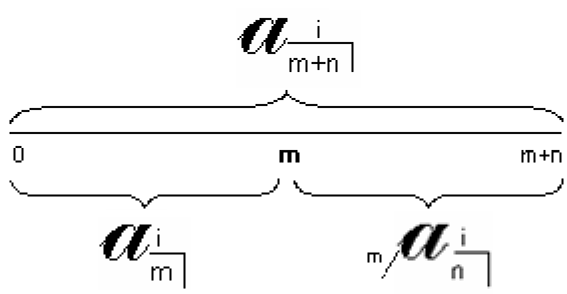



$$_{m/}a_{\overline{n}|}^{i} = v^m \, a_{\overline{n}|}^{i} = v^m \frac{1 - v^n}{i}$$

$$_{m/}a_{\overline{n}|}^{i} = \frac{v^m - v^{m+n}}{i} = \frac{1 - v^{n+m}}{i} - \frac{1 - v^m}{i}$$

$$_{m/}a_{\overline{n}|}^{i} = a_{\overline{m+n}|}^{i} - a_{\overline{m}|}^{i}$$

Esto es fácil de demostrar: una anualidad diferida es igual a la diferencia entre dos inmediatas: la primera de ellas comprende desde la época de valuación hasta la del último pago, y la segunda el término por el que sedifiere.




$$a_{\overline{m+n}|}^{i} = a_{\overline{m}|}^{i} + {}_{m/}a_{\overline{n}|}^{i}$$

Por lo tanto:

$$_{m/}a_{\overline{n}|}^{i} = a_{\overline{m+n}|}^{i} - a_{\overline{m}|}^{i}$$

## Anualidad perpetua

$a_{\overline{n}|}^{i}$ es el valor actual de una renta inmediata vencida de $1.
Cuando n $\rightarrow\infty$, estamos en presencia de una perpetuidad.

$$a_{\overline{n}|}^{i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|}^{i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - v^n}{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} v^n = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_{\infty} = \frac{1}{i}}$$

Si fuese una renta de $c, el valor actual de la perpetuidad sería:

$$\boxed{V = \frac{c}{i}}$$

Siendo anualidades adelantadas, tenemos:

$$\mathbf{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\, a_{\overline{n}|} \quad ; \quad \mathbf{a}_{\infty} = (1+i)\,\frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{i}$$

En el caso de que la anualidad fuera diferida de maños.

$$_{m/}\mathbf{a}^{i}_{\overline{n}|} = v^{m}\, a_{\overline{n}|} \quad ; \quad _{m/}\mathbf{a}_{\infty} = \frac{v^{m}}{i}$$

# TEMA IV: SISTEMAS DE AMORTIZACION

**SISTEMAS DE AMORTIZACION:** La palabra amortización se utiliza en varios sentidos en el lenguaje comercial.

En un estricto sentido financiero, se la usa para simbolizar la forma de extinción de una obligación, mediante el pago de la deuda.

También suele dársele otro significado, conocido como depreciación, que representa el procedimiento de quita de valor de cierto tipo de bienes, derivada de su uso, o del mero transcurso del tiempo. No es este el tema que nos ocupa.

Trataremos ahora, de los sistemas de cancelación de una deuda mediante una serie de pagos escalonados.

Podría ocurrírsenos múltiples combinaciones, pero nos limitaremos únicamente, por razones prácticas, a los conocidos como sistemas europeo o francés, y al sistema americano. También se los puede diferenciar haciendo referencia a anualidades a una sola tasa de interés, y anualidades a dos tasas de interés.

**SISTEMA EUROPEO DE AMORTIZACION.** La deuda V se amortiza mediante n pagos (generalmente anuales). Cada pago es de c pesos (la cuota ces constante). El sistema admite amortizaciones parciales. Cada cuota está compuesta de dos partes: los intereses a la tasa i sobre el saldo de la deuda, y el remanente, que es la cantidad que se destina a amortizar. Las cuotas son vencidas.

Las principales características son:

1 – La deuda V se amortiza mediante n cuotas vencidas a la tasa de interés i.

2 – Las cuotas son iguales: $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_k = \ldots = c_n = c$

3 – Cada cuota se compone de dos partes: $c_k = I_k + t_k$ ;$I_k$ son los intereses a la tasa i sobre el saldo deudor al comienzo del año k, y $t_k$ la amortización de ese año. 4 – El sistema acepta entonces amortizaciones parciales, y la deuda decrece año a año en la medida de las mismas, desde $V_0 = V$ ; $V_1 = V – t_1$; $V_2 = V - t_1 - t_2$ ; . . . hasta $V_n = 0$.

5 – Los intereses se calculan sobre el saldo deudor y son decrecientes como la deuda. Siendo la cuota constante y los intereses decrecientes, las amortizaciones deben ser por lo tantocrecientes:

$$c_1 = I_1 + t_1 \quad ; \quad I_1 > I_2 > I_3 > \ldots > I_n$$
$$c_2 = I_2 + t_2$$
$$\vdots \qquad t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$$
$$c_n = I_n + t_n$$

6 - La suma de las amortizaciones parciales debe ser igual a ladeuda:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = V$$

----------------------------------

$$c_1 = I_1 + t_1 = V.i + t_1 \qquad \mathbf{I}$$

$$c_2 = I_2 + t_2 = (V - t_1).\ i + t_2 \qquad \mathbf{II}$$

$$c_3 = I_3 + t_3 = (V - t_1 - t_2).\ i + t_3 \qquad \mathbf{III}$$

……………………………………

Siendo las cuotas iguales: $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots\ldots$, igualamos los segundos miembros.

$$V.i + t_1 = (V - t_1).\ i + t_2 \qquad \textbf{I y II}$$

$$V.i + t_1 = V.i - t_1.i + t_2 \quad ; \quad t_2 = t_1 + t_1.i = t_1\,(1+i)$$

---

$$(V - t_1).\ i + t_2 = (V - t_1 - t_2).\ i + t_3 \qquad \textbf{II y III}$$

$$V.i - t_1\,.i + t_2 = V.i - t_1\,.i + t_2\,.i + t_3 \quad ; \quad t_3 = t_2 + t_2.i = t_2\,(1+i)$$

Vemos así que las amortizaciones están en progresión geométrica de razón (1+i), siendo por lo tanto:

$$t_1 = t_1 \ ;\ t_2 = t_1\,(1+i) \ ;\ t_3 = t_1\,(1+i)^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ t_n = t_1\,(1+i)^{n-1}$$

Sabemos que:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = V$$

$$t_1 + t_1\,(1+i) + t_1\,(1+i)^2 + t_1\,(1+i)^3 + \ldots + t_1\,(1+i)^{n-1} = V$$

$$t_1\,[\underbrace{1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1+i)^{n-1}}_{s_{\overline{n}|}}] = V$$

$$t_1\ .\ s_{\overline{n}|} = \qquad\qquad \underline{t_1 = V\ s^{-1}_{\overline{n}|}}$$

$$c_1 = V.i + t_1 = V.i + V.\ s^{-1}_{\overline{n}|} = V\,(\,i + s^{-1}_{\overline{n}|}\,) \qquad \underline{c = V\ a^{-1}_{\overline{n}|}}$$

---

<u>Ejemplo</u>: Una deuda de \$1.000.000 se amortiza mediante 6 cuotas anuales vencidas al 5% de interés, por el sistema europeo de amortización. Se pide el valor de la cuota y el cuadro de amortización.

$$C = V\,a^{-1}_{\overline{n}|} \qquad c = 1.000.000 \times a^{-1\,(0{,}05)}_{\overline{6}|}$$

$$c = 1.000.000 \times 0{,}19701745 = 197.017{,}45$$

<u>Cuadro de amortización</u>:

| n (1) | $V_k$: Deuda (2) | $I_k$: Intereses (3) | **c** : Cuota (4) | $t_k$:Amortizacion . (5) | $\sum t_k$:Amort. Acumul. (6) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $V_0$: 1.000.000 | $I_1$=50.000 | c= 197.017,45 | $t_1$=147.017,45 | 147.017,45 |
| 2 | $V_1$: 852.982,55 | $I_2$=42.649,15 | c= 197.017,45 | $t_2$=154.368,30 | 301.385,75 |
| 3 | $V_2$: 698.614,25 | $I_3$=34.930,71 | c= 197.017,45 | $t_3$=162.086,74 | 463.472,49 |
| 4 | $V_3$: 536.527,51 | $I_4$=26.826,37 | c= 197.017,45 | $t_4$=170.191,08 | 633.663,57 |
| 5 | $V_4$: 366.336,43 | $I_5$=18.316,82 | c= 197.017,45 | $t_5$=178.700,63 | 812.364,20 |
| 6 | $V_5$: 187.635,80 | $I_6$= 9.381,65 | c= 197.017,45 | $t_6$=187.635,80 | 1.000.000 |

La primera columna corresponde a los períodos de pago de la deuda. En la segunda columna se registra el saldo deudor $V_0 = V$ y $V_n = 0$.

En la tercera los intereses sobre el saldo deudor (Vemos que los mismos son decrecientes). La cuarta columna no es necesario registrarla ya que la cuota es igual a todos los años.

La quinta columna es la de amortizaciones. Se la obtiene como la diferencia entre **$c - I_k = t_k$**. Calculada la primera $t_1$, las demás pueden encontrarse también, multiplicando la anterior por (1+i), en nuestro caso: 1,05.

La última columna registra el total amortizado.

<u>Saldo deudor en una época cualquiera</u>. (En función del fondo amortizante $t_1$)

Hemos visto que en las épocas: 0, 1, 2, 3, 4, ... , n , corresponden los saldos deudores: $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots, V_n$, y las amortizaciones:

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n.$$

También afirmamos que:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n = V$$

El total amortizado en la época k es:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_k = \sum_{j=1}^{k} t_j$$

Y por lo tanto el saldo deudor es:

$$V - (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_k) = V - \sum_{j=1}^{k} t_j = V - t_1 \sum_{j=1}^{k} (1+i)^{j-1}$$

$$V_k = V - t_1\, s_{\overline{k}|}$$

<u>Aclaración</u>

$s_{\overline{n}|}$ = imposiciones vencidas

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$ = imposiciones adelantadas

$a_{\overline{n}|i}$ = amortizaciones vencidas

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ = amortizaciones adelantadas

<u>Saldo deudor en función de la anualidad c</u>

$$V_k = V - t_1\, s_{\overline{k}|} = V - V\, s_{\overline{n}|}^{-1}\, s_{\overline{k}|} = V - V \frac{i}{(1+i)^n - 1} \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

$$V_k = V \left[ 1 - \frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^n - 1} \right] = V \left[ 1 - \frac{v^{n-k} - v^n}{1 - v^n} \right] \text{ se multiplica y divide por } v^n.$$

$$V_k = V \frac{1 - v^{n-k}}{1 - v^n} = V \frac{i}{1 - v^n} \frac{1 - v^{n-k}}{i} = V \cdot a_{\overline{n}|}^{-1}\, a_{\overline{n-k}|}$$

$$V \cdot a_{\overline{n}|}^{-1} = c \qquad \boxed{V_k = c \cdot a_{\overline{n-k}|}}$$

El saldo deudor en una época cualquiera es el valor actual de las (n-k) anualidades que faltan abonar.