

## DETERMINANTES

### DEFINICION DE DETERMINANTE:

Sea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  una matriz de  $(2 \times 2)$ . Definimos el determinante de  $A$  como:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Con frecuencia denotado como:  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

El determinante de una matriz es una función “ $f$ ” tal que, a toda matriz cuadrada  $A$  que pertenece al conjunto  $R^{(n \times n)}$ , le asigna o le hace corresponder un escalar “ $k$ ” que pertenece al conjunto de los reales

Simbólicamente:  $A = f : R^{(n \times n)} \rightarrow R$  a todo  $A \in R^{(n \times n)}$  le asigna un  $k \in R$

### DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE (3 x 3)

#### METODO DE LAPLACE

El método de Laplace nos permite calcular determinantes de  $(n \times n)$ . Es un método aplicable a matrices de cualquier dimensión  $(3 \times 3)(4 \times 4); (5 \times 5); \dots (n \times n)$ .

Para entender el desarrollo de este método, debemos definir previamente que se entiende por *menores y cofactores*.

Sea  $A$  una matriz de orden “ $n$ ” denotaremos con  $M_{ij}$  a la matriz de orden  $(n - 1)$  que se obtiene a partir de  $A$  eliminando la fila “ $i$ ” y la columna “ $j$ ” de  $A$ . El determinante de esta matriz  $M_{ij}$  se

denomina menor del elemento " $a_{ij}$ " de A y definiremos el cofactor de " $a_{ij}$ ", denotado por  $C_{ij}$ , como el menor signado

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Por ejemplo

$$\text{Dado: } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ entonces } M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} ; M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

y además el signo será:

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(6-20) = 14 ; C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20-4) = -16$$

Fácilmente podemos observar que el signo  $(-1)^{i+j}$  que acompaña a los menores forma una matriz cuadrada lo que podríamos denominar una matriz de signos alternados, teniendo en cuenta que siempre quedará sobre la diagonal principal signos positivos.

$$\text{Matriz (3x3)} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} ; \text{Matriz (4x4)} = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

En el método de Laplace, el determinante de una matriz A de orden (n x n) es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando todos los elementos de una línea (fila o columna) por sus respectivos cofactores. Siempre se deberá elegir una fila o columna por la cual se desarrollará el método para calcular el determinante, cualquiera sea la fila o columna que se elija el resultado del determinante será siempre el mismo.-

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} \text{ desarrollado por la fila "i"}$$

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} \text{ desarrollado por la columna "j"}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollaremos por la 2ª fila:

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (2-6) + 2 \cdot (1-9) - 4 \cdot (2-6) = 0$$

Desarrollaremos por la 3ª columna:

$$|A| = 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0-6) - 4 \cdot (2-6) + 1 \cdot (2-0) = 0$$

Desarrollaremos por la 1ª fila:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 8) - 2 \cdot (0 - 12) + 3 \cdot (0 - 6) = 0$$

De esta manera se muestra que cualquiera sea la fila o columna que se elija para calcular el determinante el resultado siempre será el mismo. -

### METODO DE SARRUS

Este es un método que no funciona para determinantes de  $(n \times n)$  si  $n > 3$ . Vale decir si tenemos un determinante de  $(4 \times 4); (5 \times 5); (6 \times 6) \dots (n \times n)$  este método no es aplicación. -

El método consiste en plantear el determinante repitiendo las dos primeras filas o las dos primeras columnas, simbólicamente:

Repitiendo filas

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Para calcular se procede de la siguiente manera:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Repitiendo columnas:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Para calcular se procede de la siguiente manera:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Ejemplo:      Calcular:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = [(1.2.1) + (0.2.3) + (3.2.4)] - [(3.2.3) + (1.2.4) + (0.2.1)] = (2 + 0 + 24) - (18 + 8 + 0) = 0$$

Si repetimos las columnas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = [(1.2.1) + (2.4.3) + (3.0.2)] - [(3.2.3) + (2.4.1) + (1.0.2)] = (2 + 24 + 0) - (18 + 8 + 0) = 0$$

## PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Los determinantes tienen muchas propiedades que pueden facilitar el cálculo. Se describirán algunas de ellas .

**Propiedad N° 1:** Si cualquier fila o columnas del determinante es el vector cero, entonces:  $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 0$$

Ejemplo:  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

**Propiedad N° 2:** Si la  $i$ -ésima fila o la  $j$ -ésima columna están multiplicadas por una constante, entonces todo el determinante está multiplicado por la misma constante. -

$$A = \begin{vmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & -6 & 10 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0.5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Si resolvemos ambos miembros se verificará que se cumple la igualdad

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & -6 & 10 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = (40 + 6) + 4(-12 - 32) = -130$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \left[ 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right] = 2 \cdot [(20 + 3) + 4(-6 - 16)] = -130$$

Podemos ver con este ejemplo el cumplimiento de la propiedad.-

**Propiedad N° 3:**

$$\text{Sean: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces:} \quad |C| = |A| + |B|$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 30 \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 104 \quad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 134$$

**Propiedad N° 4:** Si se intercambian las posiciones de dos filas o de dos columnas el resultado del determinante estará afectado por un signo negativo:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{Intercambiando dos filas})$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{Intercambiando dos columnas})$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2-3) + 0(-1-6) - 3(1-4) = 4$$

Se resuelve el determinante por Laplace. Ahora si cambiamos de posición por ejemplo la 2ª y 3ª fila, tendremos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \left( (1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-1)[1(3-0) - 2(6-1) + 3(0+1)] = 4$$

Claramente podemos observar que los resultados son iguales, lo mismo ocurre si se intercambian dos columnas entre si.-

**Propiedad N° 5:** Si la Matriz  $A$  tiene dos filas o dos columnas iguales entonces  $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2-3) - 2(-1-6) + 3(1-4) = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1-6) - (-1-6) + 5(2-2) = 0$$

**Propiedad N° 6:** Si una fila o columna de  $A$  es una combinación lineal de otra fila, entonces  $|A| = 0$

Se demostrará esta propiedad con un ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

En el determinante del primer miembro vemos claramente que en apariencia no hay filas o columnas iguales, pero en el segundo miembro vemos que la primera fila es igual a la segunda fila pero multiplicada por una constante.-

**Propiedad N° 7:** Si una fila es la suma de las otras dos filas, entonces  $|A| = 0$ , lo mismo ocurre con las columnas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(9 - 16) - 3(9 - 12) + 5(4 - 3) = 0$$

En este caso la tercera fila es la suma de la primera con la segunda

**Propiedad N° 8:** Dada una matriz  $A$  de  $(n \times n)$  entonces:  $|A| = |A^t|$  el determinante de  $A$  es igual al determinante de  $A$  transpuesta.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2 - 3) + 0(1 - 6) - 3(1 - 4) = 10$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (1)(0 - 3) - (1)(2 - 3) + 2(6 - 0) = 10$$

**Propiedad N° 9:** Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $(n \times n)$ , entonces:  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}; (A)(B) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Para demostrarlo calculamos estos tres determinantes:

$$|A| = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \quad ; \quad |B| = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

$$|A| \cdot |B| = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) =$$

$$|A| \cdot |B| = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12} \quad (i)$$

Si calculamos el determinante del producto matricial tendremos

$$|A \cdot B| = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})$$

$$|A \cdot B| = (a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11}a_{11}b_{12} + a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} + a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} + a_{22}b_{21}a_{12}b_{22})$$

Luego si eliminamos los paréntesis y simplificamos , se tendrá:

$$|A.B| = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12} \quad (ii)$$

Las expresiones ( i ) y ( ii ) son iguales.-

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad A.B = \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 34 & 32 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad ; \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 28 = -18 \quad \rightarrow \quad |A| \cdot |B| = 36$$

$$|A.B| = \begin{vmatrix} 16 & 14 \\ 34 & 32 \end{vmatrix} = 512 - 476 = 36$$

### INVERSA DE UNA MATRIZ DE ORDEN N . MATRIZ DE COFACTORES – MATRIZ ADJUNTA.

Se ha visto en la Unidad de Matrices como encontrar la inversa de una matriz de ( 2 x 2 ).

Pero queda la posibilidad de tener que determinar la inversa de una matriz cuadrada de orden mayor que dos, o sea ( 3 x 3 ); ( 4 x 4 ); ( n x n ).-

Para poder determinar la inversa en estos casos debemos hacer uso de matrices especiales como ser la matriz de los cofactores y matriz adjunta.-

Cuando se determina la inversa de una matriz debemos pedir que se cumpla la siguiente igualdad:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \quad (i)$$

Donde:  $A^{-1}$  : Matriz inversa a determinar  $I$  : Matriz Identidad

Para hallar la inversa de una matriz de orden 3, se usará la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA$$

Donde:  $\begin{cases} AdjA : \text{Adjunta de } A \\ AdjA = (Cofact.A)^t \end{cases}$  ; Donde  $(Cofact.A)^t$  : Cofactores de A transpuesta

De la expresión ( i ) surge claramente que deberá ser  $|A| \neq 0$  para que la matriz A admita inversa; en caso de ocurrir que  $|A| = 0$  estamos en condiciones de afirmar que la matriz no admite inversa.-

### MATRIZ DE COFACTORES

Para poder determinar la matriz de los cofactores se deberá proceder de la siguiente manera:



Dada:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  para determinar la matriz de los cofactores debemos tener en cuenta la

regla de los signos ya considerada cuando se aplicó el método de Laplace, vale decir  $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ , nuestro objetivo será encontrar una matriz con los siguientes elementos:

$$CofacA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Para determinar los elementos  $c_{ij}$ , podemos decir que el mismo queda determinado al anular la fila y la columna que convergen a esa posición

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ entonces el determinante que reemplaza a } a_{11} \text{ es } c_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ de la}$$

misma manera se deben determinar todos los demás determinantes, como por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ entonces el determinante que reemplaza a } a_{12} \text{ es } c_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Continuando de esta manera se determina la matriz de los cofactores:

$$Cofac.A = \begin{pmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Una vez determinada esta matriz, se la debe transponer para encontrar de esta manera la matriz adjunta.-

Ejemplo: Determinar la inversa de la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Debemos tener en cuenta que:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA$ . Para lo cual se calculará antes que nada el determinante de la matriz para ver si admite o no inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1.0.3) + (2.4.1) + (3.2.1) - [(1.0.3) + (1.4.1) + (3.2.2)] = -2$$

por lo consiguiente como  $|A| = -2 \rightarrow (|A| \neq 0)$  admite inversa.-

Determinamos a continuación la matriz de los cofactores:

$$Cofac.A = \begin{pmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo consiguiente si } CofA = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow (CofA)^t = AdjA = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz ya estamos en condiciones de determinar la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Queda solamente hacer la verificación:  $A.A^{-1} = I$

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad siempre se debe cumplir.-