MATRICES

Definiciones previas:

VECTOR FILA – VECTOR COLUMNA

En general, definimos un ***Vector renglón n-dimensional*** como un conjunto ordenado de **n** números escritos como:

Vector fila: $(x_1; x_2; ......; x_n)$ Vector Columna: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$

Los siguientes son ejemplos de vectores:

i) $(3;6)$ Es un vector fila.- ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Es un vector columna

En la definición de vector se introduce un término muy importante que es "ordenado", y es un término esencial porque dos vectores con las mismas componentes pero ordenados de distinta forma, son distintos, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$(1;2;3) \neq (3;2;1)$$

PROPIEDADES DE LOS VECTORES

Propiedad Nº 1: Dos vectores columna o fila son iguales si y solo si tienen el mismo número de componentes y sus componentes correspondientes son iguales:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ son iguales si y solo si } a_1 = b_1 \;\; ; \;\; a_2 = b_2 \;\; ; \;\; a_3 = b_3$$

Propiedad Nº 2: La suma de dos vectores se define como:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Propiedad Nº 3: Multiplicación de un vector por un escalar

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ sea : } \alpha \text{ un escalar} \quad \rightarrow \quad a.\alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

Propiedad Nº 4: Producto escalar de dos vectores

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ el producto está representado por: $a.b = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Notamos que el producto escalar de dos vectores da como resultado un escalar (esto es un número). Pero se debe advertir que cuando hacemos un producto escalar entre dos vectores, los mismos deben tener la misma cantidad de componentes. Y se efectúa generalmente el producto entre un vector fila y un vector columna:

$$(a_1; a_2; a_3).\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

Sobre la base de todo lo definido anteriormente podemos ya definir y entrar en el análisis de las matrices.-

MATRICES – CONCEPTO

Definición:

Se denomina matriz de (m x n) a todo ordenamiento rectangular de números reales distribuidos en **m** filas y en **n** columnas.

Todos estos números contenidos dentro de una matriz se denominan componentes de la matriz donde:

- **m: Número de fila**
- **n: Número de columnas**

Las matrices se designan con letras mayúsculas de imprenta :**A;B;C** .-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1j} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2j} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{ij} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mj} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En la matriz genérica presentada podemos ver que cada componente tiene dos subíndices. El primero de ellos indica el número de fila y el segundo el número de columna.

Otra forma de simbología utilizada es la siguiente:

Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{11}, a_{12}, a_{13},...,a_{ij} reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa: $A = (a_{ij})$. El primer subíndice de cada elemento indica el renglón, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.

$$\begin{array}{c} a_{31} \to \text{Columna} \to \\ \downarrow \\ \text{Renglón} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array}$$

Ejemplos

Sea la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina: a_{21}, $a_{22,}$ a_{33} y a_{43}

Solución

a_{21}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$
a_{22}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$
a_{33}: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$
a_{43}: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

En general, se utilizará indistintamente la simbología

MATRIZ CUADRADA:

Se identifica como matriz cuadrada cuando tiene la misma cantidad de filas que de columnas, vale decir: $m = n$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A(3x3)$

MATRIZ RECTANGULAR

Se identifica como matriz rectangular cuando no tienen la misma cantidad de filas que de columnas, vale decir: $m \neq n$

Ejemplo: $A(2x3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ $B(3x2) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

IGUALDAD DE DOS MATRICES

Se dice que dos matrices son iguales cuando además de tener la misma cantidad de filas que de columnas, tienen los mismos elementos.-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$Si : A = B \Rightarrow a_{11} = b_{11}\ ; a_{12} = b_{12}\ ; a_{13} = b_{13}\ ; a_{21} = b_{21}\ ; a_{22} = b_{22}\ ; a_{23} = b_{23}\ ;$$

MATRICES ESPECIALES

DIAGONAL PRINCIPAL

Esta matriz se determina con los elementos que cumplen la condición: $a_{ij}\ si\ i = j$ en el caso de que se cumpla: $a_{ij} = 0\ si\ i \neq j$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ se denomina diagonal principal la formada por los elementos: $a_{11}; a_{22}; a_{33}$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Para definir esta matriz debemos primero plantear una matriz dada en forma general de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La matriz triangular superior quedará conformada por los elementos que cumplan con la siguiente condición: $a_{ij}\ si\ i \geq j\ con\ a_{ij} \in R;\ a_{ij} = 0\ si\ i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Se define como tal la matriz formada por los elementos que cumplen la condición $a_{ij} \quad si\ i \leq j \quad con\ a_{ij} \in R\ ;\ a_{ij} = 0\ \ si\ \ i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Los elementos de la misma adoptan un valor determinado según cumpla las siguientes condiciones: $\begin{cases} a_{ij} = 1 & si \quad i = j \\ a_{ij} = 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA

Se denomina como tal la matriz donde todos sus elementos son nulos, vale decir que los mismos cumplen la condición: $a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Cada matriz tiene una transpuesta que tiene propiedades similares a las de la matriz original.

Definición:

Sea A una matriz de m x n entonces la transpuesta de A se escribe A^T y es la matriz n x m obtenida intercambiando las filas y columnas de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}\rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

ALGEBRA DE MATRICES:

SUMA O DIFERENCIA DE MATRICES:

La suma o diferencia de dos matrices **A** y **B** representada por **(A+B) ,** es otra matriz de igual orden que **A** y **B** que se obtiene sumando las componentes homólogas de **A** y **B**

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\rightarrow A+B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

2) $A+0=A$

3) $A+(-A)=0$

4) $A+B=B+A$

5) $\alpha(a+b)=\alpha.A+\alpha.B$

6) $(k_1+k_2)A=k_1.A+k_2.A \qquad k_1;k_2\in R$

7) $(k_1.k_2)A=k_1.(k_2A) \qquad k_1;k_2\in R$

8) $(A+B)^T=A^T+B^T$

9) $(k.A)^T=k.A^T$

MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR:

Si A es una matriz de (m x n), y si α es un escalar, La matriz que resulta de multiplicar ese escalar por la matriz es la formada por todos los elementos de la matriz original pero multiplicados por dicho escalar:

$$\alpha A = \alpha A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \alpha A = A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea}: A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES:

Para realizar el producto de dos matrices se deberá tener en cuanta antes que nada las dimensiones de las mismas. Esto significa que si deseamos multiplicar dos matrices como por ejemplo:

$$A : (m \times n) \qquad ; B : (p \times q)$$

Para hacer el producto se debe tener en cuanta lo siguiente:

$$\begin{cases} AxB = C \rightarrow n = p \Rightarrow C : (m \times q) \\ BxA = C \rightarrow q = m \Rightarrow C : (p \times n) \end{cases}$$

Con esto podemos claramente ver que el producto de matrices en general no es conmutativo. O sea que en general podemos decir que $A.B \neq B.A$. En ocasiones puede suceder que $A.B = B.A$, pero esta no es una regla , sino que es una excepción . Esto se puede ver con un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Se pide calcular el producto A.B = C:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \qquad c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \qquad c_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad c_{22} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \quad c_{23} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{31} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad c_{32} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \quad c_{33} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

Una vez realizado esto se conforma la matriz solución:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A(2x2) \\ B(3x2) \end{cases}$$

Al ver las dimensiones de estas dos matrices podemos apreciar que : $\begin{cases} AxB = \text{No existe} \\ BxA = C(3x2) \end{cases}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & -1 \\ 19 & 17 \end{pmatrix}$$

Una forma práctica de poder hacer el producto de las matrices es disponerlas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|cc}
\boxed{BxA} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} & \left[\begin{matrix} (1.2+2.3) \\ (-1.2+0.3) \\ (5.2+3.3) \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} (1.1+2.4) \\ (-1.1+0.4) \\ (5.1+3.4) \end{matrix}\right] = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & -1 \\ 19 & 17 \end{pmatrix}
\end{array}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1- Ley Asociativa : Sean $A(nxm)\ ;\ B(mxp)\ ;\ C(pxq)$, entonces es válida la ley asociativa:

$$\boxed{A(B.C) = (A.B).C}$$

2- Ley Distributiva para la multiplicación de matrices: Si las siguientes sumas y productos están definidos, entonces:

$$\boxed{A(B + C) = A.B + A.C \quad \text{y} \quad (A + B).C = A.C + B.C}$$

ECUACIONES MATRICIALES

Con las ecuaciones matriciales se debe proceder en forma análoga a cuando nos dan una ecuación de primer grado con una incógnita, la única diferencia es que en estos casos se tiene que las incógnitas son matrices en lugar de números reales. La mejor forma de entender es mediante un ejercicio de aplicación:

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}A + 3X = X \qquad \text{Siendo : } A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos ver que A es una matriz conocida de (2 x 3) , entonces para que esté definida la suma de matrices planteada en la ecuación matricial dada, X deberá ser también de orden (2 x 3), despejando X tendremos:

$$\frac{2}{3}A + 3X = X \rightarrow 3X - X = -\frac{2}{3}A \rightarrow 2X = -\frac{2}{3}A \rightarrow X = -\frac{1}{3}A$$

$$X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \textbf{(I)}$$

En este caso se puede ver que los términos independientes son matrices de (2 x 2) entonces las incógnitas A y B también lo serán. Si aplicamos por ejemplo el método de sustitución tendremos:

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} + 2B \qquad \textbf{(II)}$$

Reemplazamos esta igualdad en la segunda ecuación:

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} + 2B\right] + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + B + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow 2B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De esta manera se determina una de las incógnitas, que reemplazamos en **(II)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -3 \end{pmatrix}$$

De esta manera quedan determinadas las dos matrices que verifican el sistema matricial dado originalmente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

MATRICES INVERSIBLES

La inversa e una matriz se puede encontrar en la medida que sea cuadrada.

Definición:

> **Se dice que una matriz A es inversible si existe una matriz B con la propiedad e que:**
> $A.B = B.A = I$ **Siendo I la matriz identidad**

Si se denomina como A^{-1}, la matriz inversa de A, significa que : $A.A^{-1} = I$. Si consideramos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y supongamos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ donde consideramos que **(x; y; z; w)** son las incógnitas que deberemos determinar y que pertenecen a la matriz inversa.-

$$A.A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego si realizamos el producto indicado tendremos:

$\begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en esto se plantea una igualdad de dos matrices u para cumplir la misma debemos plantear:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

Vale decir que quedan formados dos sistemas de dos incógnitas cada uno que podrá ser resuelto por cualquiera de los métodos conocidos.-

Ejemplo:

Dada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ determinar $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

Planteamos el producto:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3x + 4z & 3y + 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se forma los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2w = 0 \\ 3y + 4w = 1 \end{cases}$$

Se resuelven los sistemas por cualquier método conocido y resulta:

$$x = \frac{4}{-2} \rightarrow x = -2 \qquad z = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{-2}{-2} \rightarrow y = 1 \qquad w = -\frac{1}{2}$$

Con estos valores queda determinada la matriz inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$