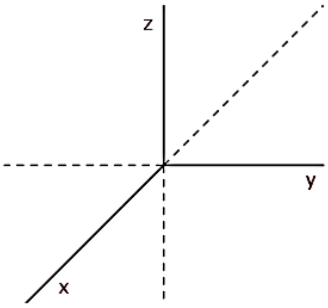
Un **sistema de coordenadas tridimensional** se construye trazando un eje Z, perpendicular en el origen de coordenadas a los ejes X e Y.

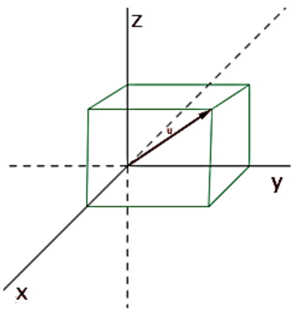
Cada **punto** viene determinado por **tres coordenadas P(x, y, z)**.

Los ejes de coordenadas determinan tres planos coordenados: XY, XZ e YZ. Estos planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas **octantes**, en el primer octante las tres coordenadas son positivas.



Vector en el espacio

Un **vector en el espacio** es cualquier **segmento orientado** que tiene su **origen** en un punto y su **extremo** en el otro.



Módulo de un vector

El **módulo** de un **vector** es la **longitud** del **segmento** orientado que lo define.

El **módulo** de un **vector** es un **número** siempre **positivo** y solamente el **vector nulo** tiene módulo **cero**.

Cálculo del módulo conociendo sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

Vector unitario

Un **vector unitario** tiene **de módulo la unidad.**

La normalización de un vector consiste en asociarle otro **vector unitario**, de la **misma dirección** y **sentido** que el vector dado, dividiendo cada componente del vector por su módulo.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Operaciones de vectores en el espacio

Suma de vectores

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Ejemplos

1. Dados $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$, $\vec{w} = (1, 2, 3)$, hallar el vector $\vec{x} = 2u + 3v - w$.

$$\vec{x} = (4, 2, 6) + (3, -3, 0) - (1, 2, 3) = (6, -3, 3)$$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 4, 5)$ y $\vec{v} = (3, 1, 2)$, hallar el módulo del vector $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = (2, 4, 5) - (3, 1, 2) = (-1, 3, 3)$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

Propiedades de la suma de vectores

1. Asociativa

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

2. Conmutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

3. Elemento neutro

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

4. Elemento opuesto

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Producto de un número real por un vector

El **producto de un número real k** $\in \mathbb{R}$ por un **vector** $\vec{u}$ es otro **vector:**

- De **igual dirección** que el vector $\vec{u}$.
- Del **mismo sentido** que el vector $\vec{u}$ **si k es positivo.**
- De **sentido contrario** del vector $\vec{u}$ **si k es negativo.**
- De **módulo** $|k| \cdot |\vec{u}|$
- Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$$k \cdot \vec{u} = (ku_1 + ku_2 + ku_3)$$

Propiedades del producto de un número por un vector

1. **Asociativa**

$k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \cdot k') \cdot \vec{u}$

2. **Distributiva respecto a la suma de vectores**

$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$

3. **Distributiva respecto a los escalares**

$(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$

4. **Elemento neutro**

$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Ejemplo:

Dado $\vec{v} = (6, 2, 0)$ determinar $\vec{u}$ de modo que sea $3\vec{u} = \vec{v}$.

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v} = \left(2, \frac{2}{3}, 0\right)$$

Combinación lineal

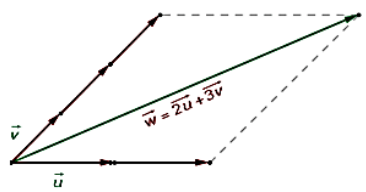
Una **combinación lineal** de dos o más vectores es el **vector** que se obtiene al **sumar** esos **vectores multiplicados** por sendos **escalares**.

$$v = a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n \overrightarrow{v_n}$$

Cualquier **vector** se puede poner como **combinación lineal** de otros que tengan **distinta dirección**.

$$\vec{w} = \overrightarrow{2u} + \overrightarrow{3v}$$

Esta **combinación lineal** es única.



Base

Tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con **distinta dirección** forman una **base**, porque cualquier **vector** del espacio se puede poner como **combinación lineal** de ellos.

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

Las **coordenadas del vector** respecto a la **base** son:

$$\vec{x} = (a, b, c)$$

Base ortogonal

Una **base** es **ortogonal** si los vectores de la base son **perpendiculares** entre sí.

Base ortonormal

Una **base** es **ortonormal** si los vectores de la base son **perpendiculares** entre sí, y además tienen **módulo 1**.

Producto escalar

El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3$$

Ejemplo:

Hallar el **producto escalar** de dos vectores cuyas coordenadas en una base ortonormal son: (1, 1/2, 3) y (4, −4, 1).

(1, 1/2, 3) · (4, −4, 1) = 1 · 4 + (1/2) · (−4) + 3 · 1 = 4 −2 + 3 = 5

Expresión analítica del módulo de un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1\cdot u_1 + u_2\cdot u_2 + u_3\cdot u_3} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Ejemplo:

Hallar el valor del **módulo de un vector** de coordenadas $\vec{u}$ = (−3, 2, 5) en una base ortonormal.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

$$\cos\alpha = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Ejemplo:

Determinar el **ángulo** que forman los **vectores** $\vec{u}$ = (1, 2, −3) y $\vec{\mathbf{v}}$ = (−2, 4, 1).

$$\cos\alpha = \frac{-2+8-3}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{4+16+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right) = 79.92°$$

Vectores ortogonales

Dos **vectores** son **ortogonales** si su **producto escalar es 0**.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3 = 0$$

Ejemplo:

Calcular los valores x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, −1).

$(x, y, 1) \perp (3, 2, 0)$ $\quad 3x + 2y = 0$

$(x, y, 1) \perp (2, 1, -1)$ $\quad 2x + y - 1 = 0$

$x = 2$ $\quad y = -3$

Propiedades del producto escalar

1. Conmutativa

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

2. Asociativa

$$k\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(k\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$$

3. Distributiva

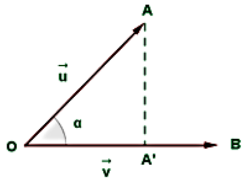
$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

4. El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.

$$\vec{u}\neq 0\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}>0$$

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$COS\ \alpha=\frac{OA'}{|\vec{u}|}\qquad OA'=|\vec{u}|\cdot COS\ \alpha$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot OA'\qquad OA'=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

OA' es la proyección del vector $\vec{u}$ sobre v, que lo denotamos como: $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$.

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Cosenos directores

En una base ortonormal, se llaman **cosenos directores** del vector $\vec{u}$ = (x, y, z), a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los vectores de la base.

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ejemplo:

Determinar los **cosenos directores** del vector (1, 2, −3).

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14} = 1$$

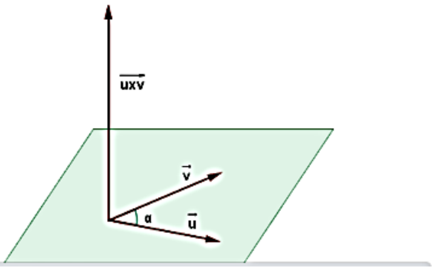
Producto vectorial

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v. Su **módulo** es igual a:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \, sen\, \alpha$$

El **producto vectorial** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$



- Calcular el **producto vectorial** de los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, 3) y $\vec{v}$ = (−1, 1, 2).

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + \overrightarrow{3k}$$

- Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar el **producto vectorial** de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es **ortogonal** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ $\qquad (-2,-2,4)\cdot(3,-1,1) = -6+2+4 = 0$

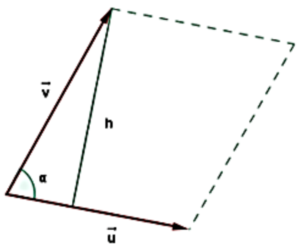
$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ $\qquad (-2,-2,4)\cdot(1,1,1) = -2-2+4 = 0$

El producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.

$$A = |\vec{u}|\cdot h = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



Ejemplo:

- Dados los vectores $\vec{u} = (3,1,-1)$ y $\vec{v} = (2,3,4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\,u^2$$

Propiedades del producto vectorial

1. Anticonmutativa

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

2. Homogénea

$$\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$$

3. Distributiva

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} .$$

4. El **producto vectorial** de dos **vectores paralelos** en igual al **vector nulo**.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

5. El **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ es **perpendicular** a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Producto mixto

El **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al **producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.**

El **producto mixto** se representa por [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$].

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$$

Ejemplos:

- Calcular el **producto mixto** de los vectores:

$$\vec{u} = (2,-1,3) \quad \vec{v} = (0,2,-5) \quad \vec{w} = (1,-1,-2)$$

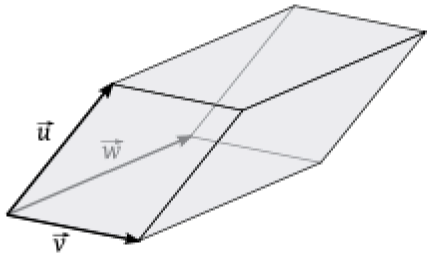
$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = (2,-1,3)\cdot(-9,-5,-2) = -18+5-6 = -19$$

Volumen del paralelepípedo

El valor absoluto del **producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son vectores tridimensionales, entonces $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ es igual al volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.



Paralelepípedo determinado por tres vectores

Así, la norma de un producto cruz representa el valor de un área, mientras que la norma de un producto mixto representa un volumen.

La demostración procede observando que

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = |\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}||\cos\theta|$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{w}$.

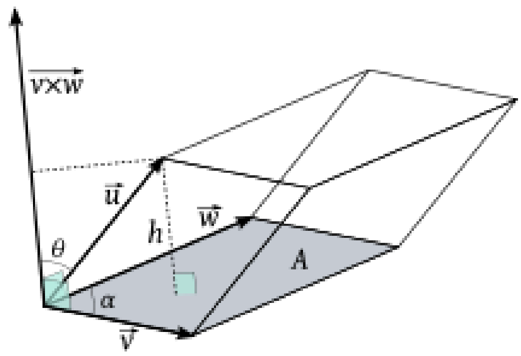


Diagrama para demostrar la interpretación geométrica.

Por otro lado $|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}||\sin\alpha|$ corresponde al área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{v}, \vec{w}$ y α es el ángulo entre ellos.

Así, reordenando los factores el producto tenemos:

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = (|\vec{u}||\cos\theta|)|\vec{v}\times\vec{w}| = h\cdot A = V.$$

donde h es la altura del paralelogramo, como indica la figura, A es el área del paralelogramo de la base y V es el volumen del paralelepípedo.

La interpretación geométrica anterior proporciona un tercer criterio geométrico de estilo similar a los señalados para los otros productos.

Tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son coplanares si y sólo si

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0.$$

Lo anterior se sigue de que el volumen del paralelepípedo tendrá volumen cero si y sólo si los vectores que los definen están en un mismo plano.