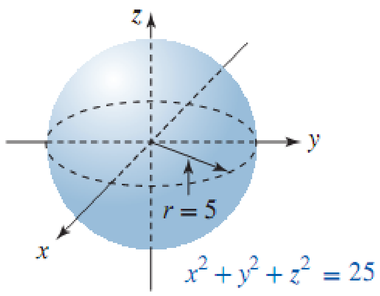
Tema 1: Superficie en el espacio

Una ecuación del tipo F(x; y; z) = 0 representa, en general, una superficie en el espacio tridimensional. La ecuación anterior se llama ecuación implícita de la superficie.

EJEMPLO

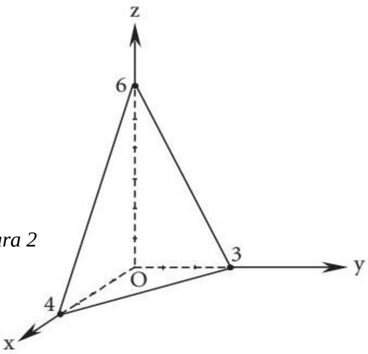


1.- La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ define una esfera de centro en (0; 0; 0) y radio 5.

2.- La ecuación x = 0 define el plano yz.

3.- En general una ecuación lineal en tres variables de la forma ax + by + cz = d donde a; b; c y d son números cualesquiera define un plano en el espacio cuando al menos uno de los coeficientes a; b; c es no nulo . Por ejemplo 3x+4y+2z=12 representa un plano que intercepta a los ejes coordenados en (4,0,0) , (0,0,3) y (0,0, 6) a los ejes coordenados (Figura 2)

Figura 2



Si uno o más de los coeficientes de la ecuación general del plano ax + by + cz = d es nulo, el plano ocupará una posición particular en relación a los ejes y planos coordenados .

- La ecuación 4y +2z= 12 representa a un plano paralelo al eje x, interceptando a los otros ejes en (0,3,0) y (0,0,6) .El plano es paralelo al eje de la variable ausente en la ecuación (Figura 3)
- La ecuación 3x +2z= 12 representa a un plano paralelo al eje y (figura 4)
- La ecuación 4y +3x= 12 representa a un plano paralelo al eje z (figura 5)

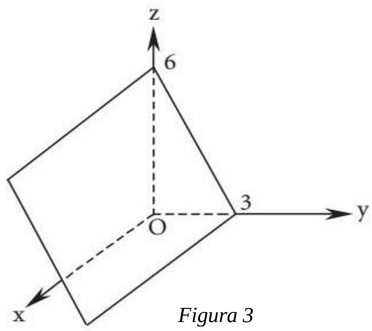


Figura 3

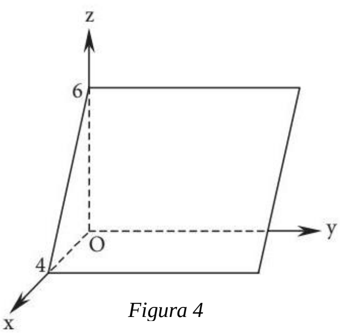


Figura 4

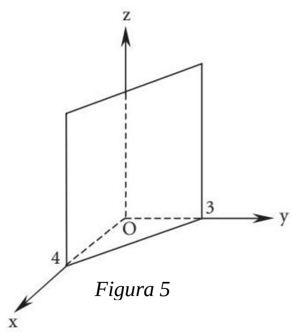


Figura 5

- Toda ecuación de la forma **z = k** representa un plano paralelo al plano xy e intercepta al eje z en (0,0,k) . En la figura 6 están representados los planos de ecuación **z = 0** y **z = 6 .**
- **y = k** representa un plano paralelo al plano xz
  x = k representa un plano paralelo al plano yz

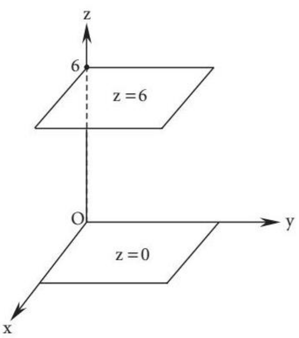


Figura 6

En la figura 7 están representados los planos de ecuación **y = 0** y **y = 3 , y** en la figura 8 los planos **x=0** y **x=4**

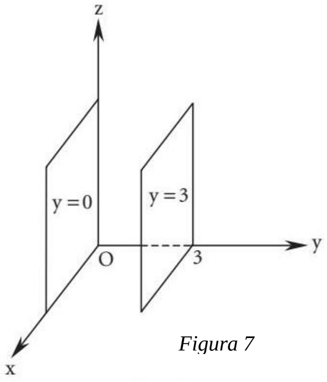


Figura 7

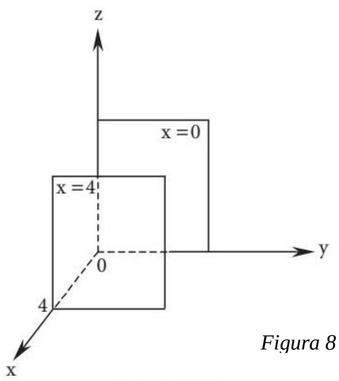
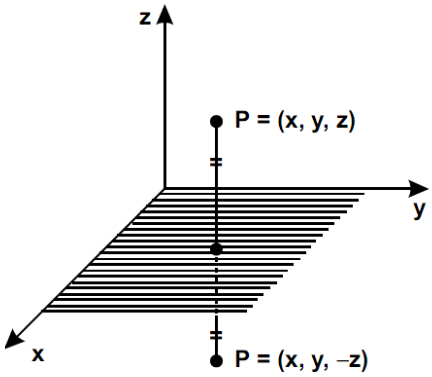


Figura 8

Simetría

a) Simetría en relación a los planos coordenados



Una superficie es simétrica con respecto al plano xy si para cualquier punto P = (x, y, z) de esa superficie existe otro punto P '= (x, y, -z) perteneciente a la superficie. La ecuación no cambia al reemplazar z por -z.

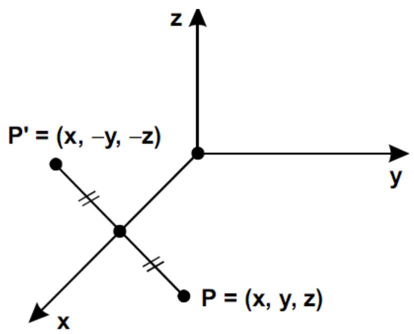
Por lo tanto, la superficie cuya ecuación cartesiana no se altera cuando cambiamos el signo de una de las variables es simétrica respeto al plano de las otras dos variables. Si la ecuación sólo contiene potencias pares de una de las variables , esa superficie es simétrica respecto al plano correspondiente a las otras variables

En particular: si la ecuación cartesiana de superficie contiene solo exponentes pares para la variable z, entonces la superficie es simétrica respecto al plano xy

<u>Ejemplos</u>

1) $z^2 + x - y + 3 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al plano xy.
2) $x^2 + 2y - 3z + 4 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al plano yz.
3) $3x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xz + 3 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al plano xz.
4) $y^4 - 3x^3z + z + 2 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al plano xz.

b) Simetría con respecto a los ejes de coordenadas.



Una superficie es simétrica con respecto al eje x si para cualquier punto P = (x, y, z) de esa superficie, existe otro punto P '= (x, -y, -z) perteneciente a la superficie.

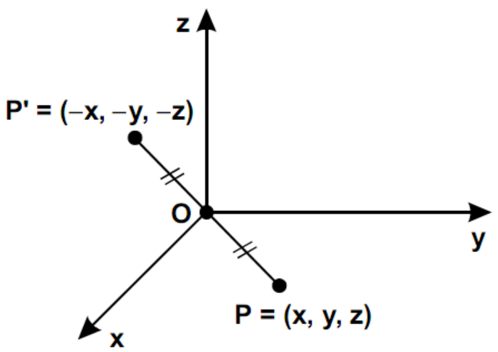
Por lo tanto, la superficie cuya ecuación cartesiana no se altera cuando cambiamos el signo de 2 variables es simétrica en relación al eje de la tercera variable. Si ecuación de una superficie contiene potencias pares de dos variables e impares de la tercera variable , esa superficie es simétrica con respecto al eje de correspondiente a la tercera variable

En particular: si la ecuación algebraica de una superficie contiene exponentes pares para las variables x e y e impar para la variable z, la superficie es simétrica con respecto al eje z

<u>Ejemplos</u>

1) $3x^2 + y^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al eje z.
2) $y^2 + 2z^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al eje x.
3) $x^2 + 2y^2 - 3z^3 - 2xy + 1 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al eje z.
4) $3x^4 + z^2 - y^3 + y + 2 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al eje y.

c) Simetría con respecto al origen de coordenadas



Una superficie es simétrica con respecto al origen, si para cualquier punto P = (x, y, z) de esa superficie existe otro punto P '= (-x, -y, -z), perteneciente a la superficie

Por lo tanto, superficie cuya ecuación cartesiana no se altera a al intercambiar el signo de las tres las variables es simétrica con respecto al origen del sistema de coordenadas.

Una superficie es simétrica respecto al origen cuando su ecuación algebraica solo contienen términos de grado par y de grado impar en relación las variables .

En particular: cuando todos los exponentes de las variables de una ecuación son pares la superficie es simétrica respecto al origen y también en relación con el ejes planos coordinados

<u>Ejemplos</u>

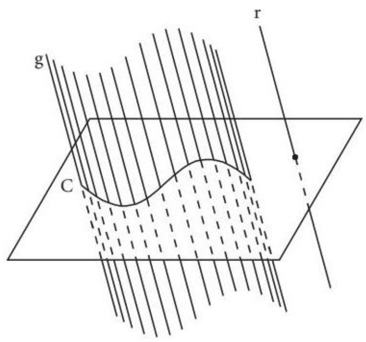
1) $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática simétrica respecto al origen, a los ejes y planos coordenados.
2) $xy + xz - yz + 3 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática es simétrica respecto al origen
3) $xyz + 2x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática es simétrica respecto al origen
4) $x^3 + y^3 - 4z = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática es simétrica respecto al origen
5) $x^3 + y^3 - 4z + 2 = 0 \Rightarrow$ superficie cuadrática no es simétrica respecto al origen

Superficies Cilíndricas

Sea C una plana y r una recta fija no paralela al plano de C.

Una superficie cilíndrica es una superficie generada por una recta g que se mueve paralelamente a la recta fija r a lo largo de la curva plana C.

La recta g que se mueve se denomina generatriz y la curva C se llama curva generatriz o directriz del cilindro .



Estudiaremos los cilindros rectos, es decir, cilindros cuya curva generatriz o directriz C se encuentra en uno de los tres planos coordenados y cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a C.

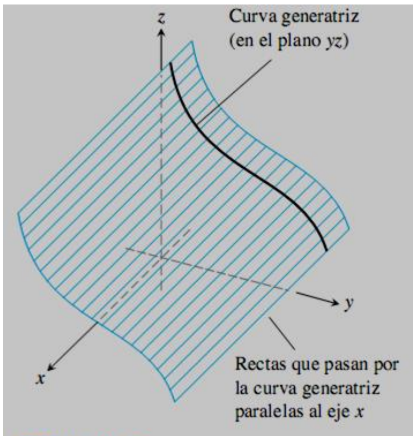


FIGURA 12.43 Cilindro y curva generatriz.

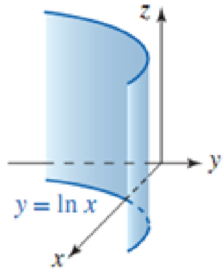
En general, una ecuación donde figuran 2 variables define un cilindro cuya generatriz paralela al eje correspondiente a la tercera variable ausente. Así:

a) la ecuación *F(x; y) = 0* representa un cilindro con recta generatriz paralela al eje z y directriz **C**: *F (x; y) = 0; z = 0;*
b) la ecuación *F(x; z) = 0* representa un cilindro con recta generatriz paralela al eje y y directriz **C**: *F (x; z) = 0; y = 0;*
c) la ecuación *F(y; z) = 0* representa un cilindro con recta generatriz paralela al eje x y directriz **C**: *F (y; z) = 0; x = 0;*

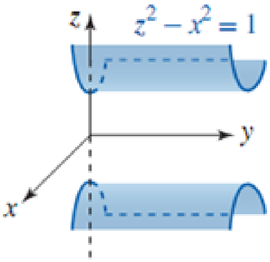
EJEMPLO

Representar en R^3 siguientes las ecuaciones

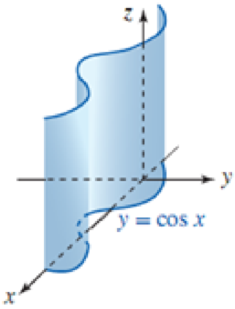
a) $y = \log x$
b) $z^2 - x^2 = 1$
c) $y = \cos x$
d) $z = 1 - y^2$



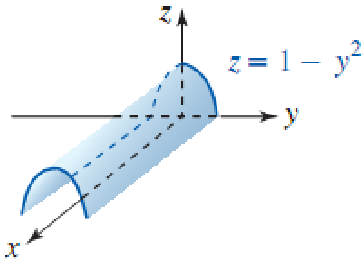
Cilindro logarítmico



Cilindro hiperbólico



Cilindro

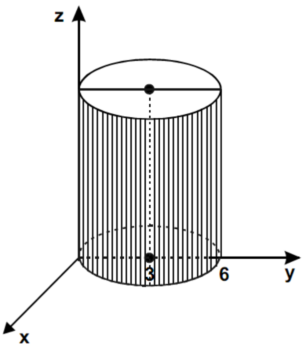


Cilindro parabólico

EJEMPLO

1.- Representar la superficie cilíndrica $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ e indicar la ecuación de su directriz

Rta :



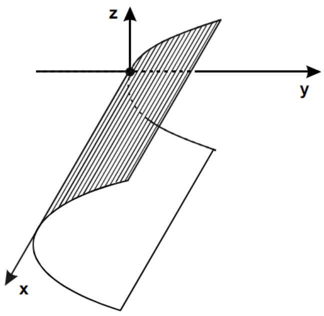
La superficie cilíndrica es circular y tiene por directriz una circunferencia en el plano xy,

C= (0, 3), R= 3 y generatrices paralelas al eje z.

$$ecuacion\ de\ la\ directriz\ \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

2.- Representar la superficie cilíndrica $z^2 = 2y$ e indicar la ecuación de su directriz

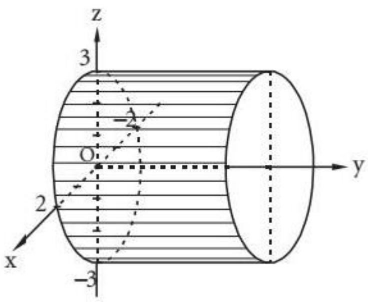
Rta :



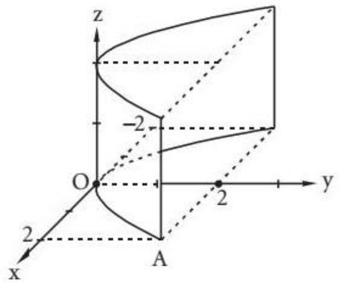
La superficie cilíndrica es parabólica y tiene por directriz una parábola en el plano zy , y generatrices paralelas al eje x.

$$ecuación\ de\ directriz\ \begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$$

3.- Representar la superficie cilíndrica elíptica $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$



4,.- La ecuación $x^2 = 2y$, en el espacio, es la ecuación de una superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola $x^2 = 2y$, $z=0$ (curva contenida en el plano XZ) y de generatriz paralela al eje z.



Superficies cuádricas.

En general, una cuádrica es la superficie formada por todos los puntos del espacio cuyas ordenadas (x, y, z) verifican una ecuación de segundo grado

$$\underbrace{A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2}_{Términos\ \ cuadráticos} + \underbrace{D\,xy + E\,xz + F\,yz}_{Términos\ \ rectangulares} + \underbrace{G\,x + H\,y + I\,z}_{Términos\ \ lineales} + \underbrace{J}_{T.independ.} = 0$$

donde A;B;C;D;E;G;H; I; J son constantes.

Cuando en la ecuación de la cuádrica no aparecen términos rectangulares, tenemos una cuadrica no rotada. En este caso, la ecuación puede reducirse completando cuadrados a uno de los siguientes tipos de ecuación:

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0}$$

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Iz = 0}$$

Para tener idea de qué tipo de grafica define una ecuación implícita es útil considerar las trazas, que son las curvas planas que se obtienen de la intersección de la superficie con los planos paralelos a los planos coordenados. Esto es, si la superficie está definida por una ecuación implícita F(x; y; z) = 0 las trazas serán de tres tipos:

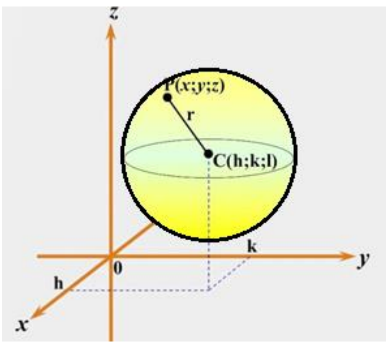
- Las trazas en planos paralelos al plano yz son las curvas definidas por:
$$\begin{cases} x = k \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$
- Las trazas paralelas al plano xz son las curvas definidas por:
$$\begin{cases} y = k \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$
- Las trazas paralelas al plano xy son las curvas definidas por:
$$\begin{cases} z = k \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Esfera

La ecuación canónica de la esfera es de la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

donde, su centro es (h , k , l) y su radio es r



Se llama *esfera* al conjunto de puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamado centro

$$d(P,C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = r$$

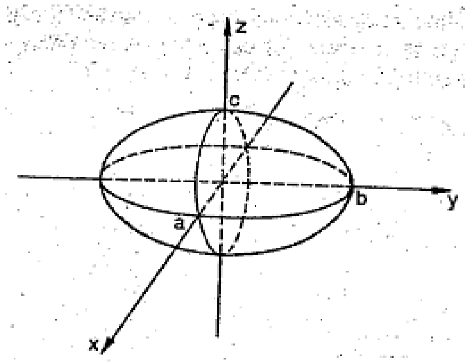
Ejemplo: Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$.

Solución : completando cuadrados $x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 - 2^2 + z^2 - 6z + 3^2 - 3^2 - 2 = 0$.

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1 + 4 + 9 + 2$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ Su centro es (1,-2,3) y su radio, 4

Elipsoide



Un *elipsoide*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

- ✓ a, b, c representan la longitud de los semiejes del elipsoide
  centro del elipsoide es (0,0,0)
- ✓ Los vértices (las intersecciones del elipsoide con los ejes coordenadas) son los puntos $(\pm a;0;0)$, $(0;\pm b;0)$ y $(0;0;\pm c)$.
- ✓ El elipsoide es simétrico con respecto a cada uno de los planos coordenados , con respecto a cada uno de los ejes coordenados y con respecto al origen de coordenadas.
- ✓ La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es una elipse
- ✓ Si algunos de los parámetros a, b, c se repita y puede considerarse el elipsoide como engendrado por la rotación de la elipse alrededor de uno de los ejes. En este caso el elipsoide se llama entonces de revolución. Por ejemplo, en el caso que a = b es una superficie de revolución
- ✓ si a = b = c = R, entonces tendremos una esfera de radio R.

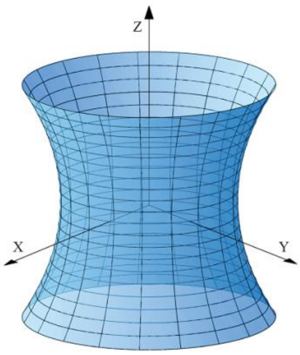
Hiperboloide de una hoja

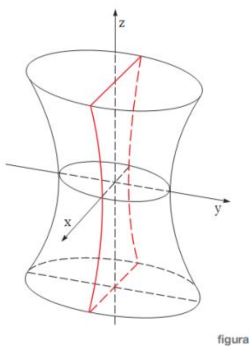
Un *hiperboloide de una hoja*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

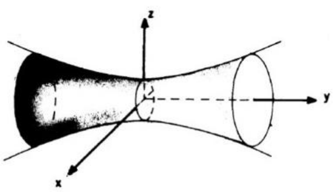
donde a,b, c son números reales positivos .

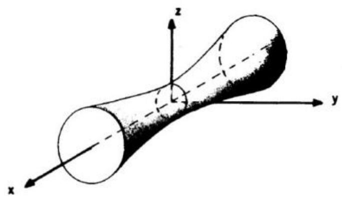
Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son en general hipérbolas. La variable con signo negativo indica el eje de simetría.





Variantes: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$





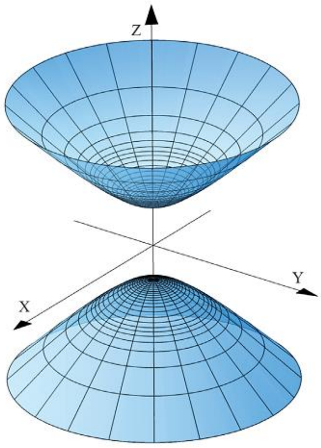
Hiperboloide de dos hojas

Un *hiperboloide de dos hojas*, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

con a>0 , b>0 , c>0

Las trazas horizontales son elipses si k > c ó k < c



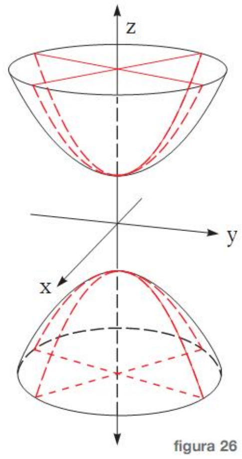
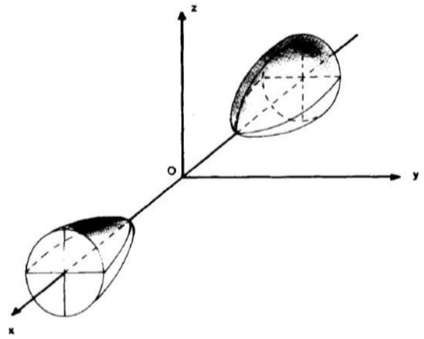
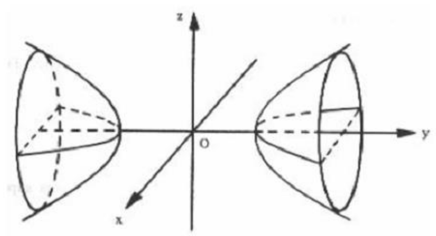


figura 26

Variantes $$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$



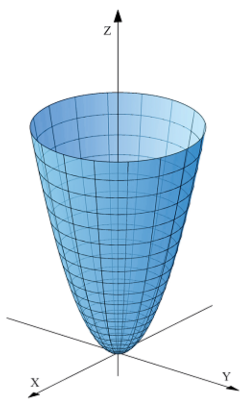


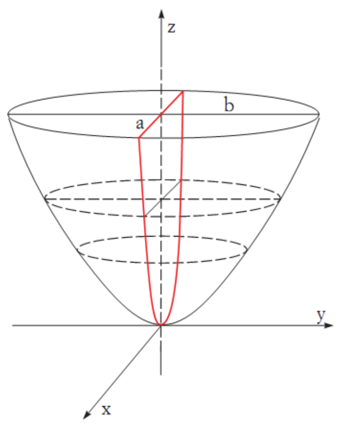
Paraboloide elíptico

Un *paraboloide elíptico* es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

con a >0 , b > 0 , c≠0

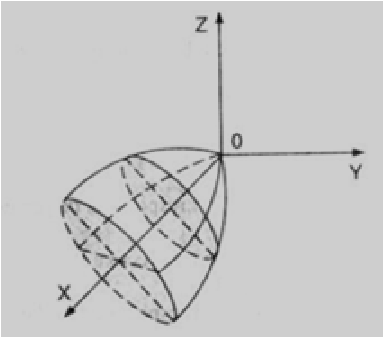


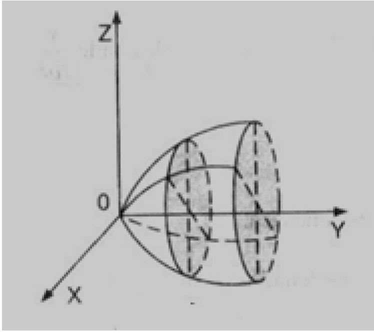


En el caso que a = b se llama un paraboloide circular y es además una superficie de revolución. La orientación del paraboloide elíptico depende del valor de c, si c > 0 es orientada hacia arriba, y si c < 0 hacia abajo.

Las trazas horizontales significativas son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide

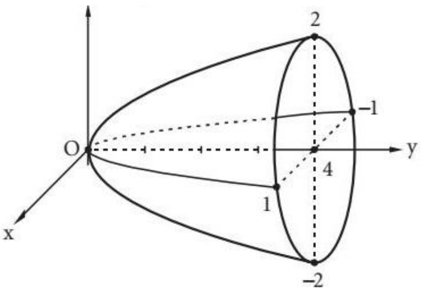
Variantes $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by$





Ejemplo: La figura representa un paraboloide de ecuación $y=4x^2+z^2$ a lo largo del eje y.

$$y=\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+z^2$$



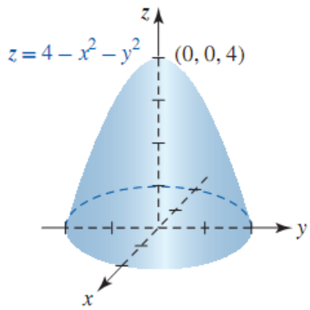
Observemos que en el plano y=4 está la elipse $x^2+\frac{z^2}{4}=1$, y las parábolas, en los planos x=0 , z=0 son **$y=z^2$, x=0** e $y=4x^2$, z=0 , respectivamente .

Ejemplo : Graficar $z=4-x^2-y^2$

Solución: Al escribir la ecuación como

$$-(z-4)=x^2+y^2$$

Reconocemos la ecuación de un paraboloide. El signo menos enfrente del término en el lado izquierdo de la igualdad indica que la gráfica del paraboloide abre hacia abajo a partir de (0,0,4)

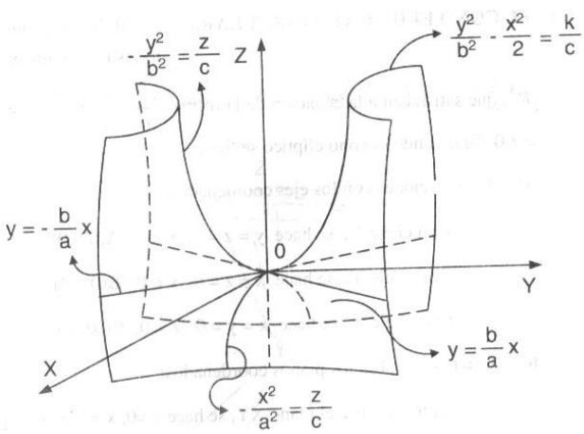


Paraboloide hiperbólico

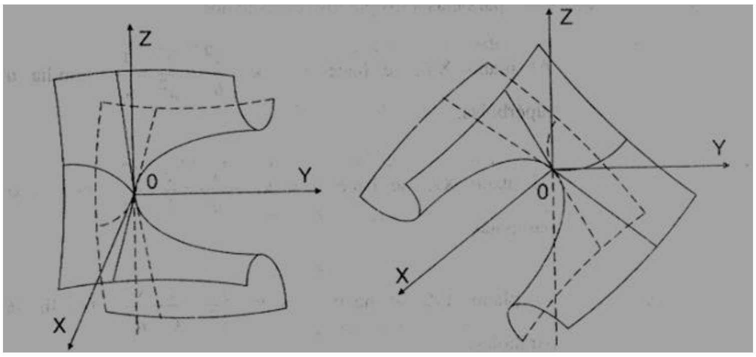
Un *paraboloide hiperbólico*, o comúnmente llamada una silla de montar, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

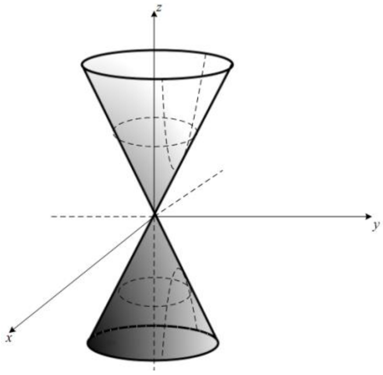
con a >0 , b > 0
Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas abiertas en sentido opuesto según sean paralelas al eje x o al eje y
Graficando el hiperboloide parabólico para el caso c > 0.



Variantes $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=by$ $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=ax$



Cono



Un cono, es una superficie cuya ecuación en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

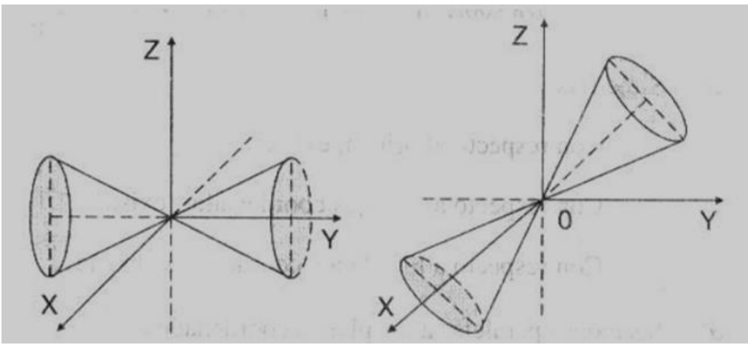
donde a,b, c son números reales positivos .

Las trazas horizontales son elipses o un punto.

Las trazas verticales son hipérbolas o un par de rectas . La variable con signo negativo indica el eje de simetría.

En el caso que a = b es una superficie de revolución.

Variantes $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$



<u>Ejemplo 1</u> : Reduzca las siguientes ecuaciones a la forma canonica e identifique la superficie cuádrica .

a) $4x^2+4y^2+z^2-4=0$
b) $-z^2-y^2=x$
c) $x^2=y^2+z^2$
d) $x^2+y^2+z^2+6x-4y-12=0$
e) $x^2+4y^2+8x-8y-4z+28=0$
f) $4x^2-2y^2+z^2-24x-4y+8z+42=0$
g) $2x^2+y^2-4z^2+2y+5=0$
h) $x^2+y^2-2y=0$
i) $6x^2+3y^2+2z^2+24x-6y-12z+39=0$
j) $x^2-4x-z+6=0$
k) $x^2+y^2-4x-6y-z+12=0$
l) $36x^2-y^2+9z^2-9=0$
m) $x^2=z^2-2y^2$

a) $4x^2+4y^2+z^2-4=0$

$\frac{4x^2}{4}+\frac{4y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=\frac{4}{4}$

$$\boxed{x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1}$$

Elipsoide $C(0,0,0)$ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$

b) $-z^2-y^2=x$

$(-1)(z^2+y^2)=x$

$$\boxed{y^2+z^2=-x}$$

Paraboloide Eliptico

c) $x^2=y^2+z^2$

$$\boxed{-x^2+y^2+z^2=0}$$

Cono

d) $x^2+y^2+z^2+6x-4y-12=0$

$x^2+6x+3^2-3^2+y^2-4y+2^2-2^2+z^2-12=0$

$(x+3)^2+(y-2)^2+z^2-12-9-4=0$

$(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=25$

$$\boxed{(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=5^2}$$

Esfera $C(-3,2,0)$ $r=5$

e) $x^2+4y^2+8x-8y-4z+28=0$

$x^2+8x+4^2-4^2+4y^2-8y-4z+28=0$

$(x+4)^2+4(y^2-2y+1^2-1^2)-4z+28-16=0$

$(x+4)^2+4(y-1)^2-4z-4+28-16=0$

$(x+4)^2+4(y-1)^2-4z+8=0$

$(x+4)^2+4(y-1)^2=4z-8$

$\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{4(y-1)^2}{4}=\frac{4(z-2)}{4}$

$$\boxed{\frac{(x+4)^2}{4}+(y-1)^2=(z-2)}$$

Paraboloide eliptico

f-) $4x^2-2y^2+z^2-24x-4y+8z+42=0.$

$4x^2-24x-2y^2-4y+z^2+8z=-42.$

$4(x^2-6x+3^2-3^2)-2(y^2+2y+1^2-1^2)+z^2+8z+4^2-4^2=-42$

$4[(x-3)^2-9]-2[(y+1)^2-1]+(z+4)^2-16=-42$

$4(x-3)^2-36-2(y+1)^2+2+(z+4)^2-16=-42$

$4(x-3)^2-2(y+1)^2+(z+4)^2=-42+36-2+16.$

$\frac{4(x-3)^2}{8}-\frac{2(y+1)^2}{8}+\frac{(z+4)^2}{8}=\frac{8}{8}$

$\frac{(x-3)^2}{2}-\frac{(y+1)^2}{4}+\frac{(z+4)^2}{8}=1$

Hiperboloide de 1 hoja.

g) $2x^2+y^2-4z^2+2y+5=0$

$2(x-0)^2+y^2+2y+1-1-4(z-0)^2=-5$

$2(x-0)^2+(y+1)^2-4(z-0)^2=-5+1$

$-\frac{(x-0)^2}{2}-\frac{(y+1)^2}{4}+(z-0)^2=1$

Hiperboloide de dos Hojas

h) $x^2+y^2-2y=0$

$x^2+y^2-2y+1^2-1^2=0$

$x^2+(y+1)^2-1=0$

$\boxed{x^2+(y+1)^2=1}$

Cilindro Circular

I) $6x^2+3y^2+2z^2+24x-6y-12z+39=0$

$6x^2+24x+3y^2-6y+2z^2-12z+39=0$

$6(x^2+4x+2^2-2^2)+3(y^2-2y+1^2-1^2)+2(z^2-6z+3^2-3^2)+39=0$

$6(x+2)^2-24+3(y-1)^2-3+2(z-3)^2-18=-39$

$6(x+2)^2+3(y-1)^2+2(z-3)^2-45=-39$

$6(x+2)^2+3(y-1)^2+2(z-3)^2=-39+45$

$\frac{6(x+2)^2}{6}+\frac{3(y-1)^2}{6}+\frac{2(z-3)^2}{6}=\frac{6}{6}$

$\boxed{(x+2)^2+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(z-3)^2}{3}=1}$

Elipsoide → $C(-2,1,3)$

$a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$

J) $x^2-4x-z+6=0$

$x^2-4x+2^2-2^2-z+6=0$

$(x-2)^2-z+6-4=0$

$(x-2)^2-z+2=0$

$(x-2)^2+2=z$

$\boxed{z=(x-2)^2+2}$

Cilindro Parabolico

K) $x^2+y^2-4x-6y-z+12=0$

$x^2-4x+y^2-6y-z+12=0$

$x^2-4x+2^2-2^2+y^2-6y+3^2-3^2-z+12=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2-z-4-9+12=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2-z-1=0$

$\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=z+1}$

Paraboloide eliptico.

L) $36x^2-y^2+9z^2-9=0$

$\frac{36x^2}{9}-\frac{y^2}{9}+\frac{9z^2}{9}=\frac{9}{9}$

$4x^2-\frac{y^2}{9}+z^2=1$

$\frac{x^2}{1/4}-\frac{y^2}{9}+z^2=1$ Hiperboloide de 1 hoja

m) $x^2=z^2-2y^2$

$x^2+2y^2-z^2=0$

$x^2+\frac{y^2}{1/2}-z^2=0$ Cono

Ejemplo Nº 2 : Identifique y represente graficamente las siguientes superficies

a) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

b) $y=\sqrt{16x^2+4z^2}$

c) $x^2+z-9=0$

d) $y^2+4z^2=4$

e) $x-y^2=0$

f) $x+2y+3z=6$

g) $y^2-9=0$

h) $z=3-x$

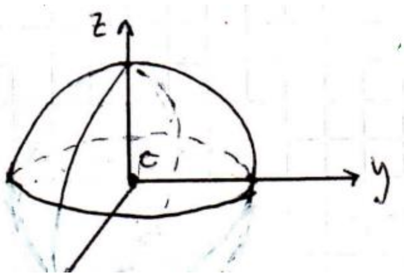
a) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

$z\geq 0$. $z^2=\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)^2$

$z^2=9-x^2-y^2$

$x^2+y^2+z^2=9$

semiesfera superior de $r=3$.



b) $y=\sqrt{16x^2+4z^2}$

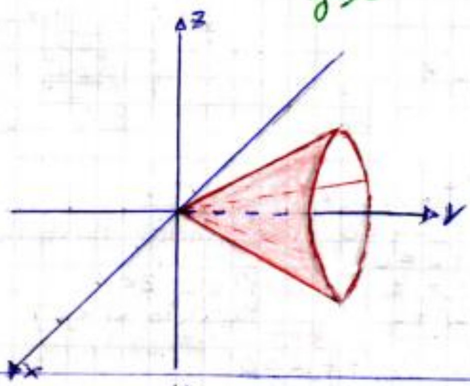
$y\geq 0$

$y^2=16x^2+4z^2$

$\frac{\cancel{16}x^2}{\cancel{4}}-\frac{y^2}{4}+\frac{\cancel{4}z^2}{\cancel{4}}=0$

$\boxed{\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{4}+z^2=0}$

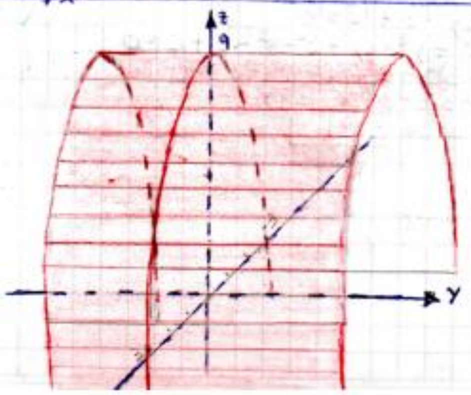
semi-cono



c) $x^2+z-9=0$

$\boxed{z=9-x^2}$

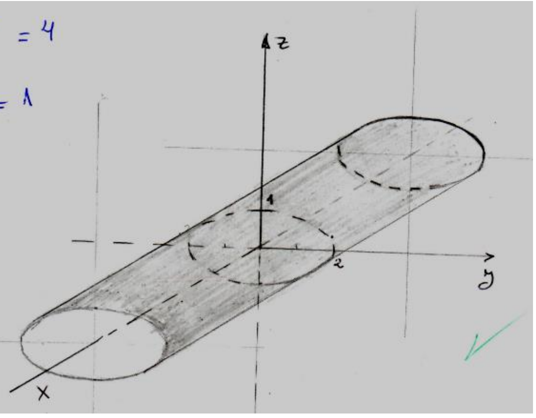
Cilindro Parabolico



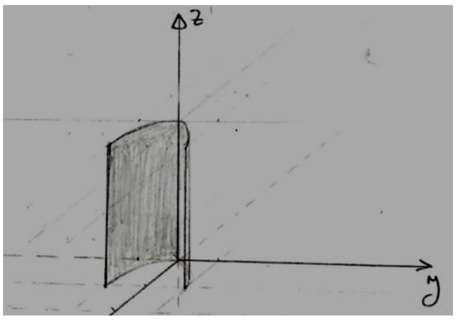
d) $y^2+4z^2=4$

$\frac{y^2}{4}+z^2=1$

cilindro elíptico.



e) cilindro parabólico $x=y^2$

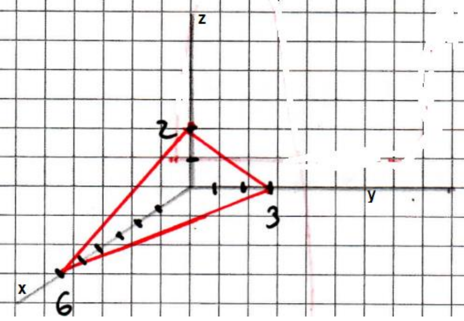


f) $x+2y+3z=6$

Si "x e y valen cero" $z=2$

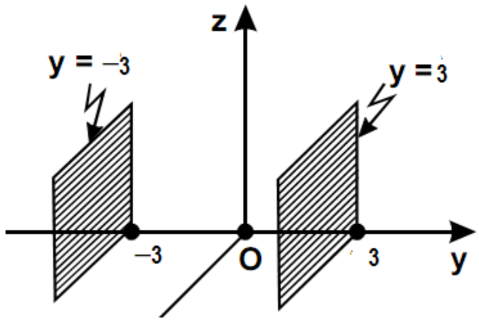
si $x=z=0 \Rightarrow y=3$

si $z=y=0 \Rightarrow x=6$



Plano

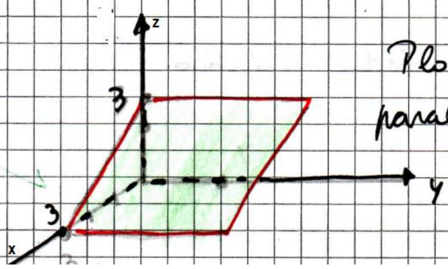
g) $y^2-9=0 \Rightarrow y=\pm 3$ dos Planos Paralelos al Plano coordenado xz



h) $z=3-x$

$z+x=3$ si $x=0 \Rightarrow z=3$

si $z=0 \Rightarrow x=3$

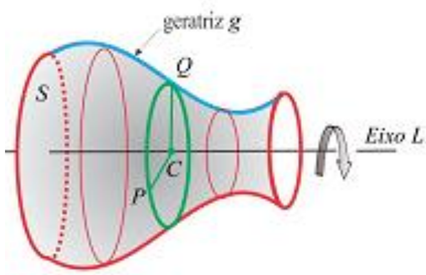


Plano paralelo al eje y.

Superficie de revolución

Definición : Una **superficie de revolución** es aquella generada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de la curva.

La curva plana g se denomina **curva generatriz**, y la recta fija L, **eje de revolución** o **eje de rotación.** Cualquier posición de la generatriz se denomina **meridiano** y cada circunferencia descripta por un punto de la superficie se llama **paralelo**



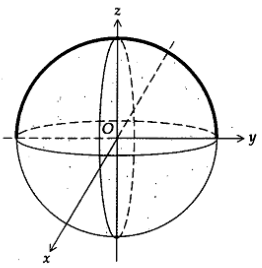


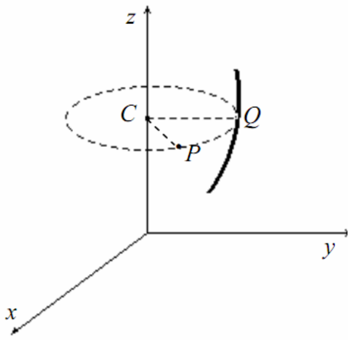
Figura . Una esfera es un ejemplo de una superficie de revolución, pues puede ser generada con la rotación de una semicircunferencia en torno de un diámetro

La esfera, el cilindro circular recto y el cono circular recto son ejemplos de superficies de revolución. También, bajo ciertas condiciones, pueden ser superficies de revolución el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas y el paraboloide elíptico.

Determinaremos la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación la curva generatriz g contenida en plano zy .

Sea $g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(y, z) = 0 \ , x = 0\}$ la generatriz de la superficie de revolución S, sea eje Z el eje de revolución.

Sea P (x,y,z) $\in S$ un punto genérico de la superficie de revolución y sea Q(0, y_1,z_1) un punto de la curva generatriz ambos pertenecientes al mismo plano (Nótese que el punto P (x,y,z) es generado por la rotación del punto Q(0, y_1,z_1) en torno del eje Z)



Como P y Q están en la misma circunferencia de centro C (0,0,z) tenemos

$$d(P, C) = d(Q, C)$$

O sea

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (y_1-0)^2 + (z_1-z)^2}$$

Como P y Q están el mismo plano concluimos que $z_1 = z$ (I) . Luego,

$$y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(II)}$$

Como punto Q está sobre la generatriz **Q** $\in g$ cumple con la ecuación :

$$\begin{cases} f(y_1, z_1) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Usando (II) y (III) obtenemos la ecuación de la superficie de revolución S buscada

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, z\right) = 0$$

Dado que se conserva la función correspondiente a la curva generatriz, es posible obtener la ecuación de una superficie de revolución, sustituyendo en la **ecuación de la curva generatriz** la variable que no corresponde al eje de revolución, por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo del eje rotación.

En la siguiente tabla resumimos los distintos casos:

Ecuación de la curva *C*	**Eje de revolución**	**Ecuación de la superficie *S***
$f(x, y) = 0$	eje x	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	eje y	$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$f(x, z) = 0$	eje x	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	eje z	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$f(y, z) = 0$	eje y	$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
	eje z	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

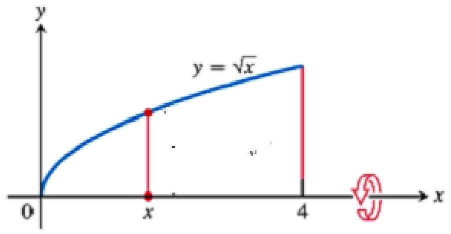
Ejemplo 1 :Determinar la ecuación de la superficie de revolución determinada por la rotación de la curva $y = \sqrt{x}$, z = 0 en torno del eje x . Graficar la superficie de revolución

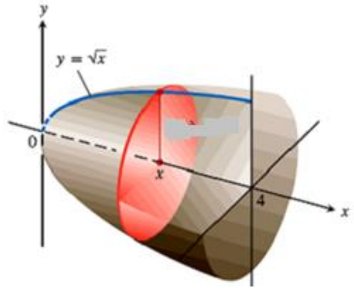
Solución : Como el eje de revolución es el eje x debemos substituir a variable y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ en la ecuación de la curva generatriz. Por lo tanto la ecuación es :

$$y = \sqrt{x}$$

$$\pm\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x}$$

$$y^2 + z^2 = x$$





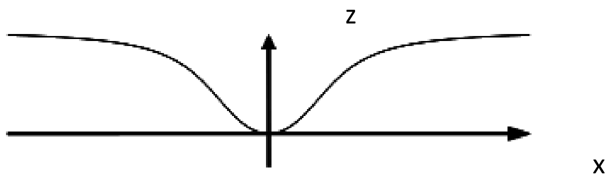
Ejemplo 2 : La superficie obtenida por la rotación de la curva generatriz en el plano zx

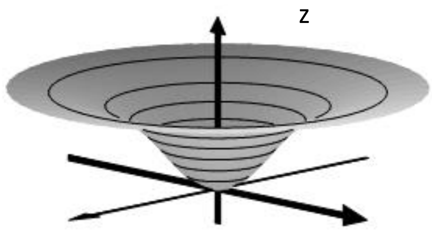
$z = arctg(x^2)$ y = 0

alrededor del eje x tiene por ecuación

$$z = arctg\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

$$z = arctg(x^2 + y^2)$$





Ejemplo 3: **Elipsoide de revolución**

La grafica de $4x^2 + y^2 = 16$ se rota en torno al eje x. Encontrar la ecuación de la superficie de revolución

Solución:

La ecuación dada tiene la forma $f(x, y) = 0$. Puesto que el eje de revolución es el eje x , vemos de la tabla que la ecuación de la superficie de revolución puede encontrarse al sustituir y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Se concluye que

$$4x^2 + (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 16$$

$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$ la superficie de revolución es denomina elipsoide de revolución

TRABAJO PRACTICO Nº1

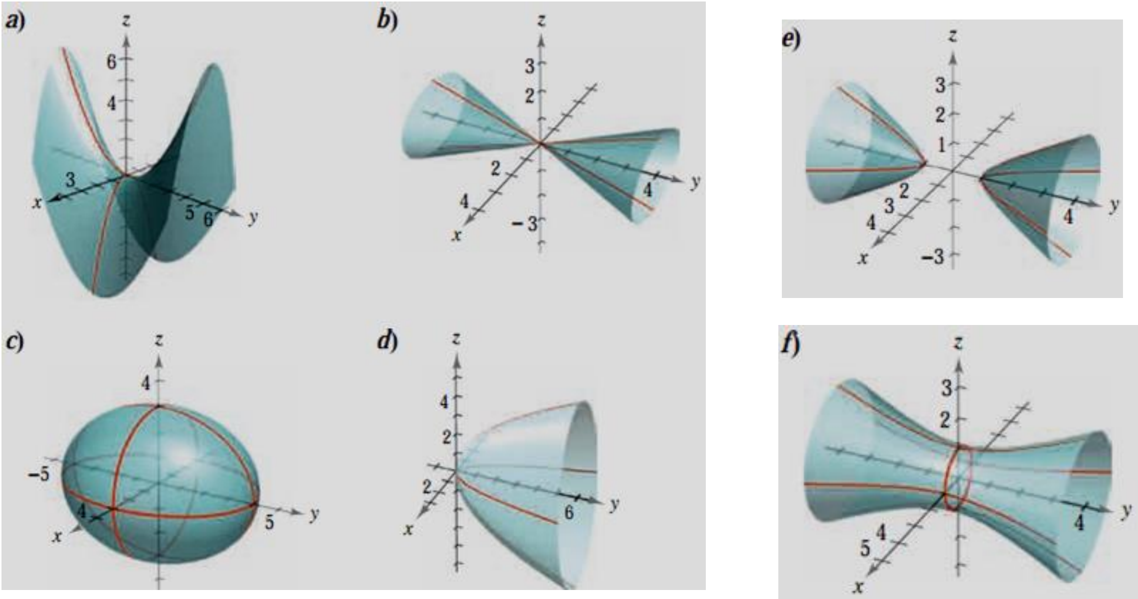
Ejercicio 1: Dibuje la gráfica del cilindro indicado.

$y = x^2$	$4x^2 + y^2 = 36$	$z^2 + y^2 = 9$	$x = 1 - y^2$	$x^2 + z^2 = 25$
$z = y^2$	$z^2 = y$	$x = z^2$	$z = x^2$	$x = y^2$
$z = e^{-x}$	$9z^2 + 4x^2 = 36$	$z = x^3 - x$	$y = e^x$	$x^2 + z = 1$

Ejercicio 2: Graficar usando geogebra las siguientes superficies

a) $z = |y + 2|$ b) z= sen y c) z = sen x d) y = sen x

Ejercicio 3 : Asociar la ecuación con su gráfica.



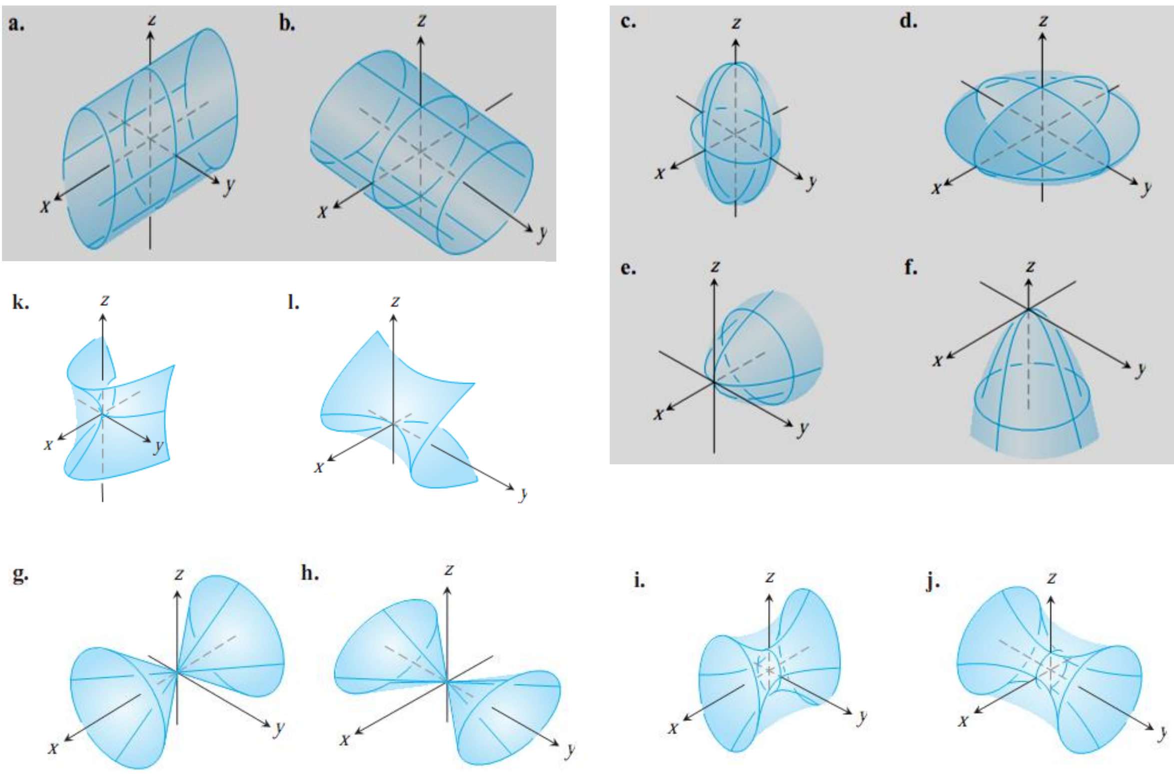
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \qquad 15\,x^2-4\,y^2+15\,z^2=-4$$

$$4x^2-\ y^2+4\,z^2=4 \qquad y^2=\ 4x^2+9\,z^2$$

$$4x^2-\ 4y\ \ +\ z^2=0 \qquad 4x^2-y^2+4z=0$$

Ejercicio 4 : Relacione la ecuación con la superficie . Además identifique la cuádrica

1. $x^2+y^2+4z^2=10$
2. $9y^2+z^2=16$
3. $x^2+2z^2=8$
4. $x=y^2-z^2$
5. $x=z^2-y^2$
6. $x^2+4z^2=y^2$
7.- $z^2+4y^2-4x^2=4$
8.- $z^2+y^2=x^2$
9.- $z^2+x^2-y^2=1$
10.- $x=-z^2-y^2$
11.- $z=-4x^2-y^2$
12.- $9x^2+4y^2+2z^2=36$



Ejercicio 5 :Encontrar el centro y el radio de la esfera

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$

Ejercicio 6 :Identifique y grafique cada superficie

a) $x = 4$

b) $y = 3$

c) $z = 4$

d) $2x + y = 4$

e) $3x + z = 6$

f) $z + 2y = 4$

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

h) $4x^2 + 36y^2 + 9z^2 - 36 = 0$

i) $36x^2 + 4y^2 - 9z = 0$

j) $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

k) $-(x^2 + z^2) = y$

l) $x^2 + z^2 = y^2$

m) $(x-4).(x+2) = 0$

Ejercicio 7 : Completa cuadrados en las siguientes ecuaciones y determina: el tipo de cuadrica que es, sus elementos notables y su representación grafica:

a) $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2x + 5y - 2z = -1$

b) $3x^2 + y^2 - z^2 + x + 2y + 2z = -1$

c) $x^2 + y^2 + x + 4y + 3z - 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 + x + 4y - z^2 - 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 + x + 4y - 1 = 0$

f) $x^2 - y^2 + x + 4y - 1 = 0$

Ejercicio 8: Para las siguientes superficies, determinar las intersecciones con los ejes y los planos coordenados:

a) $z = 8 - 4x - 4y$

b) $x + 2y = 1$

c) $y = x^2$

d) $x^2 + y^2 = 1$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

f) $2x + 4y + 3z = 4$

Ejercicio 9: Encontrar la ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva en el plano coordinado indicado, sobre el eje dado. Graficar la curva generatriz , eje de rotación y superficie de revolución usando geogebra

a) Parábola en el plano yz dada por $z^2 = 4y$ $x = 0$; Eje de revolución y

b) z = 3y ; Plano yz; Eje de revolución y ;

c) $2z = \sqrt{4 - x^2}$ en Plano xz ; Eje de revolución x

d) xy = 2 ; Plano xy ; Eje de revolución x

e) $z = 4x - x^2$; Plano xz; Eje de revolución z

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Encontrar la ecuación de la esfera cuyo diámetro tiene extremos en los puntos (2; 3;5) y (4;1; 3)

2) Mostrar que el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ tiene un punto en común con el plano $5x + 2z + 5 = 0$

3) Identificar la superficie y realizar un gráfico aproximado.

a) $4x^2 - y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 3 = 0$

b). $x^2 + y^2 + z^2 - 8 - 8y - 6z + 24 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8$

d) $x^2 - y^2 + z^2 - 10z + 25 = 0$

e) $36y^2 + x^2 + 36z = 9$

f) $y^2 + z^2 - 2x = 0$

4) Graficar los siguientes cilindros

a) $x^2 + z^2 = 1$

b) $z = |y|$

c) $x = 4 - y^2$

d) $x^2 + z = 1$

e) $4x^2 + y^2 = 36$

f) $x^2 + 4z^2 = 16$