

TEORÍA DE CONJUNTOS

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Un *conjunto* es un grupo de elementos u objetos especificados en tal forma que se puede afirmar con certeza si cualquier objeto dado pertenece o no a la agrupación. Para denotar a los conjuntos, se usan letras mayúsculas.

Cuando un elemento x_1 pertenece a un conjunto A se expresa de forma simbólica como: $x_1 \in A$. En caso de que un elemento y_1 no pertenezca a este mismo conjunto se utiliza la notación: $y_1 \notin A$

Existen cuatro formas de enunciar a los conjuntos:

- 1) Por *extensión* o enumeración: los elementos son encerrados entre llaves y separados por comas. Es decir, el conjunto se describe listando todos sus elementos entre llaves.
- 2) Por *comprensión*: los elementos se determinan a través de una condición que se establece entre llaves. En este caso se emplea el símbolo $|$ que significa "tal que". En forma simbólica es:

$$A = \{ x \mid P(x) \} = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$$

que significa que el conjunto A es el conjunto de todos los elementos x tales que la condición $P(x)$ es verdadera, como x_1, x_2, x_3 , etc¹.

- 3) *Diagramas de Venn*: son regiones cerradas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto o las relaciones entre conjuntos².

- 4) Por *descripción verbal*: Es un enunciado que describe la característica que es común para los elementos.

Ejemplo.

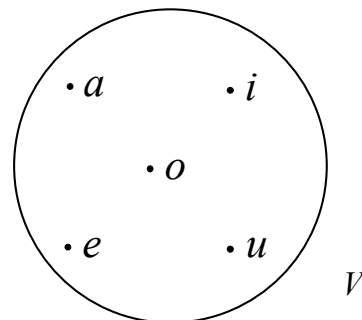
Dada la descripción verbal "el conjunto de las letras vocales", expresarlo por extensión, comprensión y por diagrama de Venn.

Solución.

Por extensión: $V = \{a, e, i, o, u\}$

Por comprensión: $V = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$

Por diagrama de Venn:



¹ La notación $P(x)$ no representa un producto, es una condición que deben satisfacer los elementos para pertenecer a un conjunto.

² En el caso particular de que un conjunto tenga un sólo elemento numérico, a menos de que se haga la distinción, no representa el número de elementos que posee el conjunto.

Ejemplo.

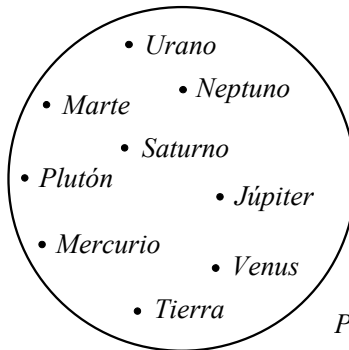
Expresar de las tres formas al conjunto de los planetas del sistema solar.

Solución.

Por extensión: $P = \{Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón\}$

Por comprensión: $P = \{x \mid x \text{ es un planeta del sistema solar}\}$

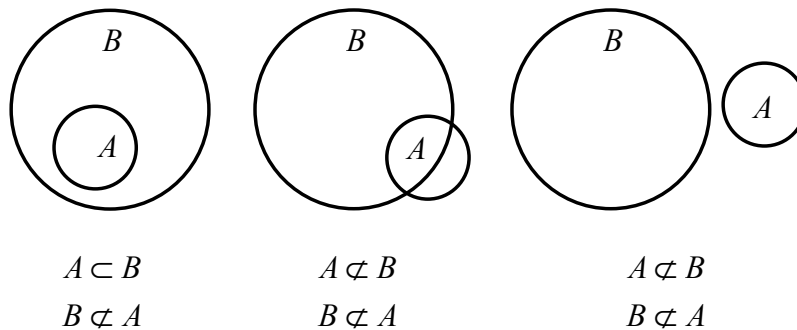
Por diagrama de Venn:



Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B , se dice que A es un *subconjunto* de B . La notación $A \subset B$ significa que A está incluido en B y se lee: “ A es subconjunto de B ” o “ A está contenido en B ”.

Si no todos los elementos de un conjunto A son elementos del conjunto B , se dice que A no es subconjunto de B . En este caso la notación $A \not\subset B$ significa que A no es un subconjunto de B .

Gráficamente, esto es:



En los ejemplos anteriores, si $F = \{a, e, o\}$ es el conjunto de las vocales fuertes y $S = \{Mercurio, Venus\}$ es el conjunto de planetas que no poseen satélites, entonces se cumple que: $F \subset V$ y que $S \subset P$. De la misma forma, nótese como: $F \not\subset P$, $S \not\subset V$, $F \not\subset S$ y $S \not\subset F$.

La *cardinalidad* de un conjunto se define como el número de elementos que posee. Se denota por medio de los símbolos η o $\#$.

De los conjuntos anteriores: $\eta(V) = 5$, $\eta(F) = 3$, $\eta(P) = 9$ y $\eta(S) = 2$.

CONJUNTOS CON NOMBRES ESPECÍFICOS

- Un conjunto *vacío* o *nulo* es aquel que no posee elementos. Se denota por: ϕ o bien por $\{ \}$. El conjunto vacío siempre forma parte de otro, así que es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplos.

$$\phi = \{ x \mid x \text{ son los dinosaurios que viven en la actualidad} \}$$

$$\{ \} = \{ x \mid x \text{ son los hombres mayores de 300 años} \}$$

$$\phi = \{ x \mid x \text{ son números positivos menores que cero} \}$$

- Un conjunto *universal* es aquel que contiene a todos los elementos bajo consideración. Se denota por U . Gráficamente se le representará mediante un rectángulo.

Ejemplos.

$$U = \{ x \mid x \text{ son los días de la semana} \} = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo} \}$$

$$A = \{ x \mid x \text{ son los días de la semana inglesa} \} = \{ \text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes} \}$$

$$B = \{ x \mid x \text{ son los días del fin de semana} \} = \{ \text{sábado, domingo} \}$$

$$C = \{ x \mid x \text{ son los días de la semana con menos de siete letras} \} = \{ \text{lunes, martes, jueves, sábado} \}$$

Nótese cómo: $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$

- Un conjunto *finito* es aquel cuyos elementos pueden ser contados.

Ejemplos.

$$J = \{ x \mid x \text{ es el número de un día del mes de junio} \}$$

$$K = \{ x \mid x^2 = 4 \}$$

$$L = \{ x \mid x \text{ es la cantidad de autos en la ciudad de México} \}$$

- Un conjunto *infinito* es aquel cuyos elementos no pueden ser contados, es decir, su cardinalidad no está definida.

Ejemplos.

$$N = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$$

$$M = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots \}$$

$$Q = \{ x \mid x \text{ es la cantidad de puntos en una línea} \}$$

- Dos conjuntos son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. Se denota por el símbolo $=$.

Ejemplo.

$$R = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 \}$$

$$S = \{ x \mid x \text{ es un dígito} \}$$

$$R = S$$

- Dos conjuntos son *desiguales* si por lo menos difieren en un elemento, es decir, si no tienen exactamente los mismos elementos. Se denota por el símbolo \neq .

Ejemplo.

$$D = \{x \mid x^2 = 9\}$$

$$E = \{-2, 2\}$$

$$D \neq E$$

- Dos conjuntos son *equivalentes* si tienen la misma cantidad de elementos, es decir, si poseen la misma cardinalidad. Se denota por el símbolo \approx .

Ejemplos.

$$W = \{x \mid x \text{ son las estaciones del año}\}$$

$$Z = \{x \mid x \text{ es un punto cardinal}\}$$

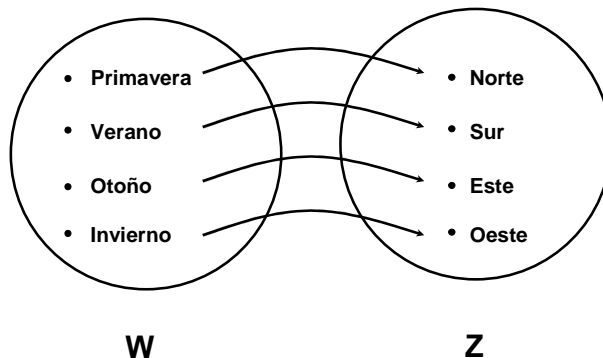
$$\eta(W) = 4$$

$$\eta(Z) = 4$$

$$W \approx Z$$

Cuando los conjuntos son equivalentes existe una correspondencia uno a uno o *biunívoca*. Esto significa que se puede establecer una relación que asocie a cada elemento del primer conjunto con un único elemento del segundo conjunto sin que sobren elementos en ningún conjunto.

En el ejemplo anterior:

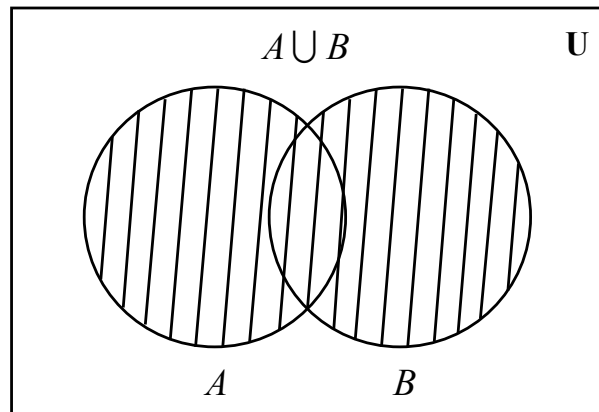


OPERACIONES CON CONJUNTOS

- La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A con todos los elementos de B sin repetir ninguno y se denota como $A \cup B$. Esto es:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$$A = \{ \text{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía} \}$$

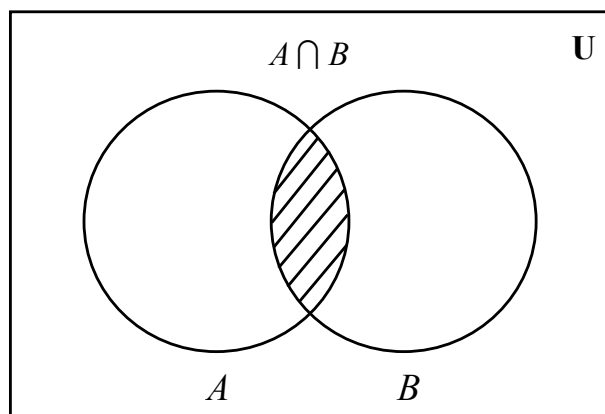
$$B = \{ \text{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano} \}$$

$$A \cup B = \{ \text{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía, durazno, melón, plátano} \}$$

- La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que también pertenecen a B y se denota como $A \cap B$. Esto es:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$$A = \{ \text{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía} \}$$

$$B = \{ \text{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano} \}$$

$$A \cap B = \{ \text{uva, naranja, sandía} \}$$

Dos conjuntos son *ajenos* o *disjuntos* cuando su intersección es el conjunto vacío, es decir, que no tienen nada en común. Por ejemplo:

$$A = \{ \text{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía} \}$$

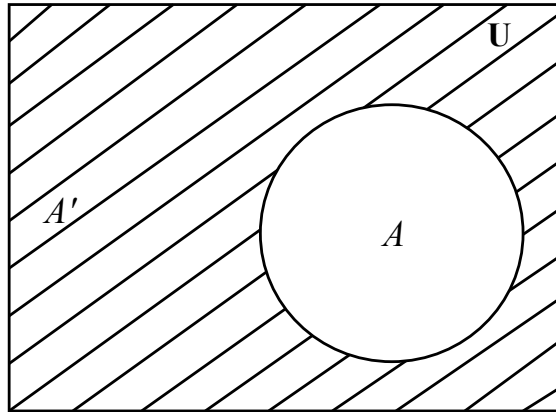
$$E = \{ \text{limón, fresa, pera, mandarina, cereza} \}$$

$$A \cap E = \emptyset$$

- El *complemento* del conjunto A con respecto al conjunto universal U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A y se denota como A' . Esto es:

$$A' = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$$U = \{ \text{mango, kiwi, ciruela, uva, pera, naranja, cereza, manzana, sandía, durazno, limón, melón, plátano} \}$$

$$A = \{ \text{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía} \}$$

$$A' = \{ \text{kiwi, pera, cereza, durazno, limón, melón, plátano} \}$$

En este ejemplo se puede notar como $n(A) + n(A') = n(U)$

De esta definición, se puede advertir que se cumplen las siguientes expresiones:

$$(A')' = A$$

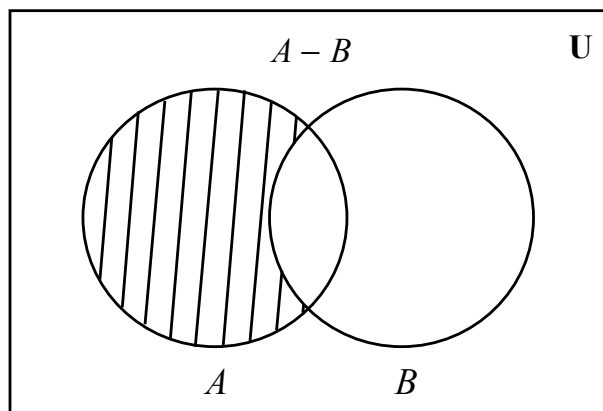
$$\emptyset' = U$$

$$U' = \emptyset$$

- La *diferencia* de los conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se denota como $A - B$. Esto es:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$$A = \{ \text{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía} \}$$

$$B = \{ \text{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano} \}$$

$$A - B = \{ \text{mango, ciruela, manzana} \}$$

$$B - A = \{ \text{durazno, melón, plátano} \}$$

Se puede advertir como $A - B \neq B - A$.

Del diagrama de Venn anterior se deducen las siguientes expresiones:

$$A - B = A \cap B'$$

$$A - B = \emptyset, \text{ si y sólo si : } A \subset B$$

$$A - B = B - A, \text{ si y sólo si : } A = B$$

$$A - B = A, \text{ si y sólo si : } A \cap B = \emptyset$$

$$(A - B) \subset A$$

$$A - \emptyset = A$$

$$A - B = B' - A'$$

Los conjuntos $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ son mutuamente ajenos (su intersección es el conjunto vacío).

Ejemplo.

Sean los conjuntos:

$$U = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n \}$$

$$A = \{ a, d, e, g, h, k, l, n \}$$

$$B = \{ a, c, f, g, k, l, m \}$$

Obtener:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) A'

d) B'

e) $A - B$

f) $B - A$

g) $A' \cup B$

h) $A \cap B'$

i) $A' \cap B'$

j) $A' - B'$

k) $(A \cup B)'$

l) $(A \cap B)'$

Solución.

$$a) A \cup B = \{a, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n\}$$

$$c) A' = \{b, c, f, i, j, m\}$$

$$e) A - B = \{d, e, h, n\}$$

$$g) A' \cup B = \{a, b, c, f, g, i, j, k, l, m\}$$

$$i) A' \cap B' = \{b, i, j\}$$

$$k) (A \cup B)' = \{b, i, j\}$$

$$l) (A \cap B)' = \{b, c, d, e, f, h, i, j, m, n\}$$

$$b) A \cap B = \{a, g, k, l\}$$

$$d) B' = \{b, d, e, h, i, j, n\}$$

$$f) B - A = \{c, f, m\}$$

$$h) A \cap B' = \{d, e, h, n\}$$

$$j) A' - B' = \{c, f, m\}$$

De acuerdo con las definiciones de unión, complemento y diferencia, se puede establecer que sus respectivas cardinalidades se pueden obtener a través de:

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$$

$$\eta(A') = \eta(U) - \eta(A)$$

$$\eta(A - B) = \eta(A) - \eta(A \cap B)$$

Ejemplo.

En una unidad habitacional viven 120 familias y se sabe que 70 de ellas tienen automóvil, que 30 poseen un reproductor de DVD y que 17 tienen ambas cosas. Se desea conocer: a) ¿cuántas familias tienen exclusivamente automóvil?, b) cuántas familias son dueños exclusivamente de un reproductor DVD, c) ¿cuántas familias son propietarias de un automóvil o de un reproductor DVD?, y d) ¿cuántas familias no poseen ni automóvil ni reproductor DVD?

Solución.

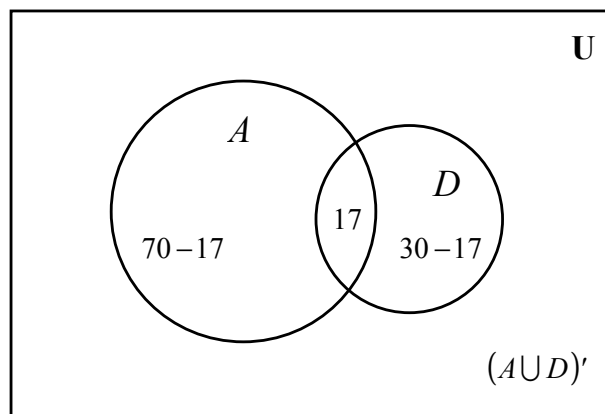
Identificando los datos por su cardinalidad:

$$\text{Número de familias del conjunto universal, } \eta(U) = 120$$

$$\text{Número de familias con automóvil, } \eta(A) = 70$$

$$\text{Número de familias con reproductor DVD, } \eta(D) = 30$$

$$\text{Número de familias con automóvil y con reproductor DVD, } \eta(A \cap D) = 17$$



Del diagrama en donde se muestran el número de elementos de los conjuntos se aprecia que:

a) El número de familias que exclusivamente tienen automóvil es:

$$\eta(A) - \eta(A \cap D) = 70 - 17 = 53$$

b) El número de familias que son dueños exclusivamente de un reproductor DVD es:

$$\eta(D) - \eta(A \cap D) = 30 - 17 = 13$$

c) El número de familias que son propietarias de un automóvil o de un reproductor DVD es: $\eta(A \cup D)$,

así que: $\eta(A \cup D) = \eta(A) + \eta(D) - \eta(A \cap D) = 70 + 30 - 17 = 83$

d) El número de familias que no poseen ni un automóvil ni un reproductor DVD es: $\eta(A \cup D)'$, por lo que:

$$\eta(A \cup D)' = \eta(U) - \eta(A \cup D) = 120 - 83 = 37$$

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Sean los conjuntos A, B, C dentro del universo U . Las seis propiedades que rigen las operaciones con esos conjuntos son las siguientes:

1. Propiedades de identidad:

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

2. Propiedades de idempotencia:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

3. Propiedades de complemento:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \phi$$

4. Propiedades asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

5. Propiedades conmutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

6. Propiedades distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

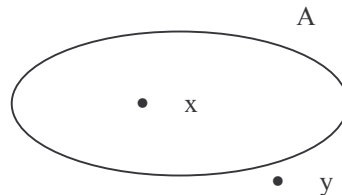
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

APUNTES COMPLEMENTARIOS

I. CONJUNTOS

I.1 La Idea de conjunto no requiere de mucha presentación.

Seguramente estarás familiarizado con gráficos como éste donde se indica que **x es un elemento del conjunto A** (lo que de aquí en más escribiremos $x \in A$) y que y no es elemento del conjunto A ($y \notin A$).



Otra forma en la que es común presentar algunos conjuntos es enumerando sus elementos, por ejemplo:

$\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ es el conjunto formado por los elementos 1, 2, 3, 4 y 5.

Claro que ninguna de las formas anteriores de representar un conjunto es apropiada para describir algunos conjuntos, como por ejemplo el conjunto de números naturales, ya que no se trata de una lista finita.

Así, para describir a este conjunto, apelamos a una caracterización de sus elementos, y escribimos: $\{ x / x \text{ es un número natural} \}$

I.2 Actividad

Piensa en el siguiente conjunto: $\{ x / x \in \mathbb{N} \wedge 2x = 1 \}$ ¿es un conjunto? ¿qué elementos tiene? ¿ninguno?.... entonces ¿es un conjunto?. Bien, creo que ya estás preparado para la siguiente definición:

I.3 EL CONJUNTO VACÍO

Será muy útil, pensar también como un conjunto, a aquel que no tiene elementos. Llamaremos a este conjunto el conjunto vacío y lo representaremos con el símbolo \emptyset , o bien $\{ \}$, indicando que no hay elementos en la lista; o ,por ejemplo, como $\{ x / x \in \mathbb{N} \text{ y } 1.x = 1 \}$, pues es claro que ningún número natural tiene por duplo a 1.

I.4 IGUALDAD DE CONJUNTOS

I. 4. 1 Actividad

Considera y compara los siguientes conjuntos:

$$A = \{ 0, 3 \}, B = \{ x / x(x-3) = 0 \}, C = \{ x / x(x-3)(x-1) = 0 \}$$

A tu juicio ¿son iguales A y B?, y A y C?

¿Estás de acuerdo en definir que:

“Dos conjuntos son iguales si ambos tienen los mismos elementos o si ambos son vacíos” ?

I.5 SUBCONJUNTOS DE UN CONJUNTO

Si A y B son conjuntos tales que todo elemento de B es también elemento de A , diremos que B es un subconjunto de A , que B es una parte de A ó que B está incluido en A . En símbolos, escribiremos : $B \subset A$.

Ejemplo:

- considerando nuevamente los conjuntos A y C de la actividad anterior, tenemos que todo elemento de A es también elemento de C , por lo tanto $A \subset C$.
- Por otro lado $C \not\subset A$ pues $1 \in C$ y $1 \notin A$.

I.5.1 Actividad

Sea A un conjunto cualquiera.

- ¿ El conjunto vacío es una parte de A ?
(Observa que decir que no lo es, significa afirmar que hay al menos un elemento de \emptyset que no pertenece a A).
- ¿ A es una parte de A ?

I.5.2 Actividad.

¿ cuántas partes tiene A si A tiene n elementos ?

Empezá por considerar algunos ejemplos:

- $A = \emptyset$
- $A = \{1\}$
- $A = \{1, 2\}$
-
- Te animás ahora a considerar el conjunto $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$?.

2.5.3 EL CONJUNTO DE PARTES DE UN CONJUNTO

Si A es un conjunto, llamaremos el conjunto de partes de A , al conjunto formado por todas las partes de A , y lo denotaremos $P(A)$. En otras palabras:

$$P(A) = \{ B / B \subset A \}$$

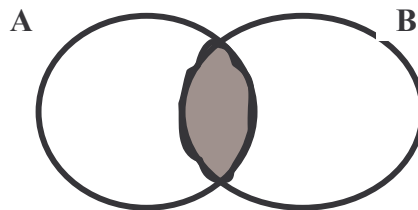
I.6 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Intersección

Dados los conjuntos A y B se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos intersección de A y B , como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos.

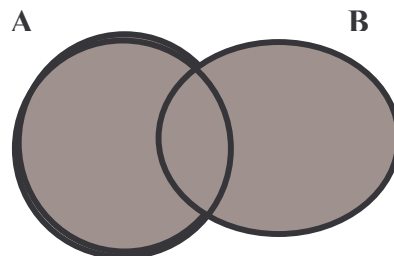
Dicho de otro modo:

$$A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$$



Unión

Dados los conjuntos A y B se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos unión de A y B , como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro.



Dicho de otro modo:

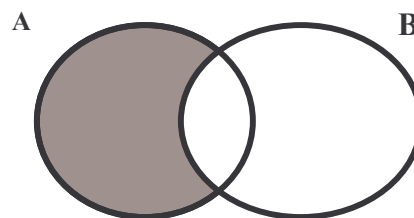
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Diferencia

Dados los conjuntos A y B se define el conjunto $A - B$ que llamaremos diferencia entre A y B, en ese orden, como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Dicho de otro modo:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

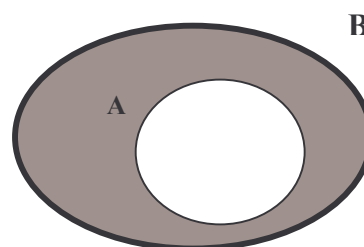


Complemento

Si $A \subset B$, se define el complemento de A con respecto a B como el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen a A.

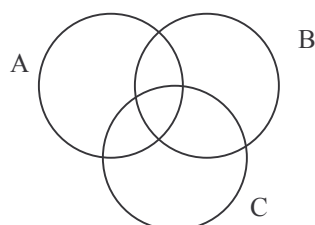
Dicho de otro modo:

$$C_B A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\} (= B - A)$$



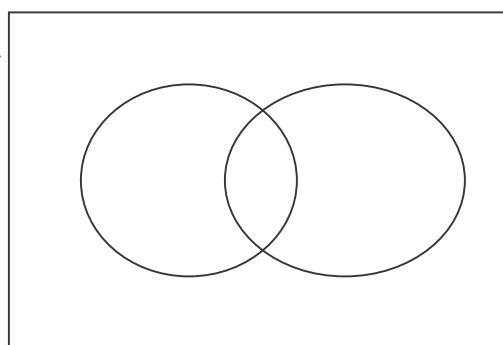
Ejercicios:

- 1) Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ y $C = \{2, 3, 4\}$ y calcula los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \cap B \cap C$, $A - (B - C)$ y finalmente $(A - B) - C$.
- 2) ¿Cuál es la intersección de $\{ \{a\} \}$ y $\{ a \}$?
- 3) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{1, 5, 6\}$, es posible determinar el conjunto D sabiendo que $A \cap D = \{3\}$, $B \cap D = \{3, 5\}$ y $C \cap D = \{5, 6\}$ y D tiene solo 4 elementos? . En caso de ser posible hazlo y en caso de no serlo, explica por qué.
- 4) En el diagrama que sigue colorea la parte que representa el conjunto $(A \cup B) - (A \cup C)$



- 5) Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subset B$. justificando la respuesta:

- Siempre existe x tal que $x \in A$ y $x \notin B$.
- Siempre existe x tal que $x \in B$ y $x \notin A$.
- Si $x \notin B$ entonces $x \notin A$.



los

- Si $x \notin A$ entonces $x \notin B$.
- A y B no tienen elementos en común.

6) Sea $A = \{3, \{3\}\}$ Determinar si son V o F los siguientes enunciados justificando la respuesta:

- $3 \in A$
- $\{3\} \subseteq A$
- $\{3\} \in A$

7) Si $A \cap B = \{6, 8, 10\}$, $A = \{4, x, 8, 10\}$ y $B = \{2, x, y, 10, 12\}$ podés obtener $x + y$?

8) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{1, 5\}$.

- Calculá: $C_A B$, $C_A (C_A B)$, ¿ $C_A (C_A B) = B$?, podés dar una razón lógica para explicar esto?
- Calcular $C_A C$, $C_A A$,
- ¿ Se puede calcular el complemento de B con respecto a C? ¿ por qué?

9) Se sabe que $A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 10\}$ $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 8\}$,
 $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$ y $B \cap C = \{2, 5, 6\}$. ¿Es posible obtener el conjunto C? Y el conjunto A? En cada caso, de ser posible, obtenelo y si no explicá por qué no es posible.

10) Sabiendo que A y B son subconjuntos de U, $C_U A = \{e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{c, d\}$
y $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$. ¿Podés deducir cuántos elementos posee A? Y cuántos B?

11) El cuestionario de una encuesta de mercado preguntaba:

- Consumís habitualmente la bebida A?
- Consumís habitualmente la bebida B?

El resumen del resultado de los encuestados que respondieron a ambas preguntas fue:

Bebida	A	B	AMBAS	NINGUNA
No de consumidores	230	200	150	40

¿Cuál es el número de los encuestados ?

12) Un encuestador lleva a cabo una encuesta entre 500 personas y resume así los datos obtenidos:

- 200 personas tienen preferencia por la música clásica
- 400 personas tienen preferencia por la música popular
- 75 personas tienen preferencia por ambas.

Ocuparías a este encuestador para llevar a cabo otra encuesta?

13) (el de la suerte!!). Un subconjunto X de números naturales tiene 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 y 8 números impares.

¿ Cuántos elementos tiene X?.